

CAPÍTULO VIII

Análisis y predicción de curvas agregadas de oferta y demanda en el mercado eléctrico europeo

Antonio Muñoz
José Portela
Eugenio Fco. Sánchez-Úbeda
Guillermo Mestre

La predicción de las curvas de oferta en los mercados eléctricos es una herramienta fundamental para el diseño de estrategias de oferta y la planificación de los recursos de generación. Las técnicas de análisis de datos funcionales son idóneas para modelar y predecir estas curvas. Estos métodos incluyen modelos de series temporales funcionales que integran enfoques de reducción de dimensión, junto con métodos no paramétricos y paramétricos. Los modelos resultantes capturan eficazmente las dinámicas complejas y estacionales de las curvas de oferta, haciendo posible la optimización de las estrategias de oferta de los agentes del mercado con un enfoque probabilístico.

Palabras clave: mercados eléctricos, predicción de series temporales, análisis de datos funcionales, estrategias de oferta.

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas muchos países han pasado por un proceso de desregulación que ha dado lugar a mercados de electricidad liberalizados que permiten a las empresas comerciar energía en subastas organizadas (Joskow, 2008).

Muchos mercados de electricidad se basan en subastas donde los agentes presentan sus ofertas de venta y compra de energía al operador del mercado, quien luego determina los precios de casación y el conjunto de ofertas aceptadas en cada período de tiempo. Este proceso de liberalización ha introducido desafíos para los agentes del mercado en cuanto a la predicción de los precios de la electricidad, dado que es un factor muy relevante para la toma de decisiones de estas compañías. Por ello, es crítico disponer de técnicas precisas que sean capaces de modelar el proceso generador de precios del mercado.

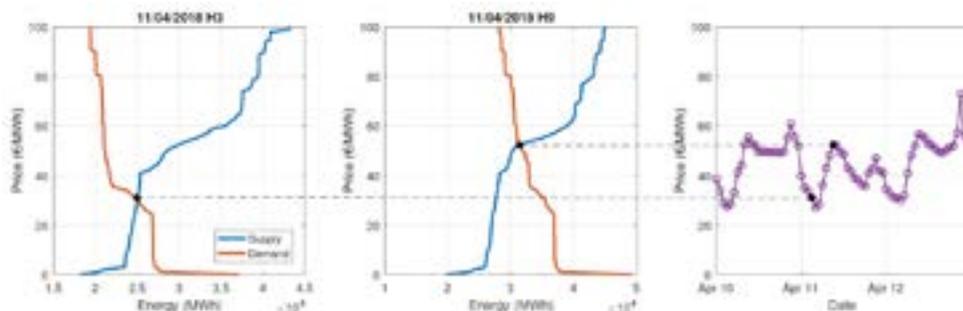
Para entender el funcionamiento de estos mercados de electricidad, consideremos un mercado horario marginalista de oferta simple, es decir, donde hay una subasta de energía para cada hora h del día. En este mercado, cada oferta de venta (o compra) de electricidad se define por un precio p y una cantidad q , que se refiere a la cantidad de energía que el agente está dispuesto a vender (o comprar) a ese precio p . Ordenando las ofertas de venta (compra) en precios crecientes (decrecientes), se construye la curva de oferta horaria de venta (compra) agregada para ese agente. Una vez que todos los agentes han presentado sus ofertas, la suma de todas las curvas de oferta resulta en la curva de oferta de venta del sistema $S_h(p)$, y la suma de las curvas de oferta de compra de cada empresa resulta en la curva de compra (o demanda) del sistema $D_h(p)$. El precio de casación p_h^* se calcula para cada hora como la intersección de las curvas de oferta de compra y venta agregadas del sistema, de ahí que $D_h(p_h^*) - S_h(p_h^*) = 0$. Este proceso se ilustra en la [figura 1](#), donde se muestran las curvas de oferta y demanda del mercado diario español para dos horas y los precios de casación resultantes.

Para una empresa generadora que participa en el mercado, es de suma importancia planificar con anticipación para gestionar los recursos disponibles de la manera más eficiente posible. Las previsiones de diferentes indicadores y variables significativas del mercado pueden proporcionar información útil para los agentes. Por ejemplo, la previsión de la demanda permite una gestión eficiente de los recursos, una programación óptima y una planificación de la producción para minimizar los costes de generación (Bunn y Farmer, 1985). Las estimaciones del precio permiten estimar si se van a cubrir los costes de operación y ayuda a protegerse contra los movimientos de precios (Weron, 2014). Como consecuencia, los modelos de previsión de la demanda (Chen *et al.*, 2019) o del precio de casación (Monteiro *et al.*, 2018; Zhang *et al.*, 2019) son ampliamente estudiados y se mejoran continuamente.

Además, todo agente del mercado suele estar interesado en optimizar su estrategia de oferta (Liu *et al.*, 2012). Esto se puede hacer mediante el análisis y la predicción de sus cur-

Figura 1.

Curvas de oferta y demanda para el mercado diario español de electricidad



Nota: La intersección de las curvas determina el precio de casación para cada hora, como se ilustra en la serie de precios horarios mostrados en el panel derecho.

Fuente: Mestre (2021).

vas de demanda residual (*Residual Demand Curves* en inglés, o *RDC*) (Baillio *et al.*, 2004; Campos *et al.*, 2016; Prete y Hobbs, 2015; Xu y Baldick, 2007). La *RDC* de una empresa generadora i se puede definir para cada hora como la función que modela el comportamiento agregado de compra y venta de todos los competidores y se puede calcular como:

$$R_h(p) = D_h(p) - S_h^{-i}(p), \quad [1]$$

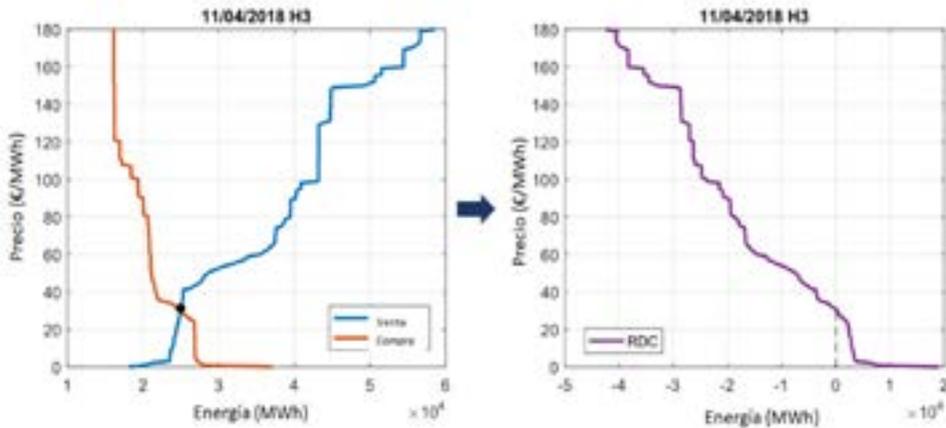
donde $S_h^{-i}(p)$ es la curva de oferta de venta de los competidores de la empresa i , que se calcula como la función de oferta del sistema $S_h(p)$ menos la función de oferta de la empresa $S_h^i(p)$, es decir, $S_h^{-i}(p) = S_h(p) - S_h^i(p)$. Para un valor de precio dado p , $R_h(p)$ da la cantidad máxima de energía q_i que la empresa generadora i puede vender en el mercado en la hora h . En Mestre *et al.* (2022) se propone una base matemática para el cálculo formal y eficiente de estas curvas. La figura 2 ilustra un ejemplo de construcción de curva de demanda residual a partir de una curva de compra y de venta.

Además cabe destacar que, en muchos mercados, el sistema de formación de precios se complica dado que existen factores adicionales que afectan a la aceptación de las ofertas. Algunos de estos factores son las limitaciones derivadas de los intercambios de energía entre zonas (que pueden saturar, causando no linealidades en la formación de precio), o las condiciones complejas del mercado ibérico, que permiten a los agentes “salirse” del proceso de casación si no consiguen unos ingresos mínimos diarios para las centrales deseadas. Esto hace que se puedan considerar curvas de demanda residual más complejas que modelen estos efectos, como se describe en Portela *et al.* (2017).

El estudio de las curvas de demanda residual permite caracterizar el comportamiento de los agentes en el mercado e identificar comportamientos anómalos en las estrategias de oferta de los mismos.

Figura 2.

Curvas de oferta y demanda para el mercado eléctrico español (izquierda) y construcción de la curva de demanda residual para esa hora (derecha)



Fuente: Elaboración propia.

Algunos estudios abordan esta tarea utilizando técnicas de agrupamiento como Ugedo *et al.* (2003) y Sánchez-Úbeda *et al.* (2006). Para que las curvas sean fácilmente tratables desde el punto de vista de análisis y aplicación de técnicas de aprendizaje automático se puede muestrear la curva original en unos puntos previamente establecidos. Por ejemplo todas las curvas representadas en la figura 3 han sido previamente muestreadas en 200 puntos uniformemente distribuidos entre dos precios dados. Aparte de esta codificación básica, en la literatura se han propuesto otros mecanismos de codificación más sofisticados basados en modelos que permiten no solamente comprimir los datos, sino también extraer conocimiento importante sobre las curvas de oferta. Por ejemplo, en Sánchez-Úbeda y García-González (2000) se propone utilizar el modelo de bisagras lineales LHM (Sánchez-Úbeda, 1999; Sánchez-Úbeda y Wehenkel, 1998), que resume la curva mediante un conjunto de rectas conectadas, capturando la forma principal de las curvas de oferta y filtrando los pequeños escalones consecutivos.

Para analizar el comportamiento temporal de las RDC, se pueden agrupar las curvas según patrones tipo suficientemente representativos. En Villar *et al.* (2001) y Collado *et al.* (2004) se propone utilizar técnicas de clustering y de estimación de funciones de densidad para identificar los perfiles. En la figura 3 se muestran los seis patrones obtenidos para

las curvas de demanda residual representadas, indicándose para cada patrón el número de curvas reales que representa (NVR).

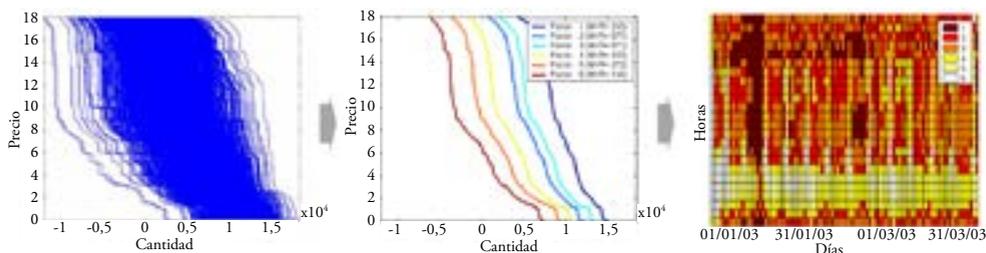
Como resultado de este análisis se obtienen los patrones característicos de oferta, que son una descripción simplificada y fácilmente interpretable del comportamiento típico de los agentes en el período analizado. El análisis de la activación temporal de estos patrones y de su relación con otras variables son una fuente de conocimiento del mercado muy importante que permite, por ejemplo, analizar cambios temporales de estrategia de los agentes. La **figura 3** representa la secuencia temporal de activación de los patrones obtenidos utilizando la representación mapa día-hora. En esta figura aparece claramente el efecto de las horas de llano, punta y valle, así como el efecto de los días festivos. Los patrones 4, 5 y 6 aparecen básicamente en los valles de los laborables y en los festivos salvo en las horas de punta de la noche.

Figura 3.

Curvas de demanda residual en el mercado eléctrico español (izquierda).

Patrones de curvas obtenidos con un modelo de clustering (centro).

Activación de los patrones en una matriz día-hora (derecha)



Nota: Cada fila representa una hora y cada columna representa un día.

Fuente: Elaboración propia a partir de Sánchez-Úbeda *et al.* (2006).

Aunque la representación de la **figura 3** es muy ilustrativa, es posible utilizar modelos supervisados de aprendizaje automático para explicar no solamente la evolución temporal del patrón activado, sino la dependencia de dicha variable con otras variables explicativas apropiadas para el estudio del mercado que se quiera realizar.

Por último, es relevante destacar que el análisis de las ofertas es una tarea crítica para optimizar la estrategia de oferta de un agente en el mercado. Esta tarea implica analizar una gran cantidad de ofertas en el mercado, ya que diariamente se publican, por ejemplo en el mercado diario español, más de 100.000 ofertas de compra y venta, tanto casadas como ofertadas, resultando en más de 2 millones de registros solo en un mes. Las técnicas de *big data* ofrecen soluciones especialmente orientadas al tratamiento de grandes volúmenes de información.

Dado que las curvas de demanda residual modelan el comportamiento de oferta de los competidores, mediante una estimación de dicha curva se pueden identificar los recursos óptimos para enfrentarse a esa demanda residual de forma que se obtenga un beneficio máximo. Esta propuesta está detallada en Campos *et al.* (2016), donde se desarrolla el modelo de optimización que permite generar una escalera de oferta óptima en base a un conjunto de escenarios estimados de curvas de demanda residual. De esta forma, la oferta del agente se protege contra posibles situaciones de incertidumbre en el mercado.

Como consecuencia, es de gran relevancia para las empresas de electricidad obtener previsiones a corto plazo de las curvas de oferta y las RDC, ya que proporcionan una descripción precisa de la estrategia de sus competidores. El objetivo principal de este capítulo es presentar distintas metodologías para la predicción de curvas en el mercado eléctrico e ilustrar su aplicación en un caso real en el mercado italiano.

2. PREDICCIÓN DE CURVAS DE OFERTA

La estadística es una rama de las matemáticas que se ocupa de la recopilación, análisis, interpretación, presentación y organización de datos observados. Estas observaciones pueden ser en forma de escalares, vectores u otros objetos. En particular, los datos que motivan este capítulo se observan en forma de curvas, es decir, cada observación es una función de valor real que toma valores en un conjunto infinito. Por lo tanto, una variable aleatoria funcional X se define como la función $X = \{X(v); v \in V\}$. Restringimos el análisis en este capítulo a variables aleatorias funcionales asociadas con un intervalo $V \subset \mathbb{R}$, sin embargo, la noción de variable funcional abarca un área más grande, por ejemplo, superficies aleatorias cuando $V \subset \mathbb{R}^2$. La observación de procesos de funciones continuas aparece en la naturaleza, las ciencias sociales o los sistemas industriales, evidenciando la diversidad de datos funcionales que se pueden encontrar.

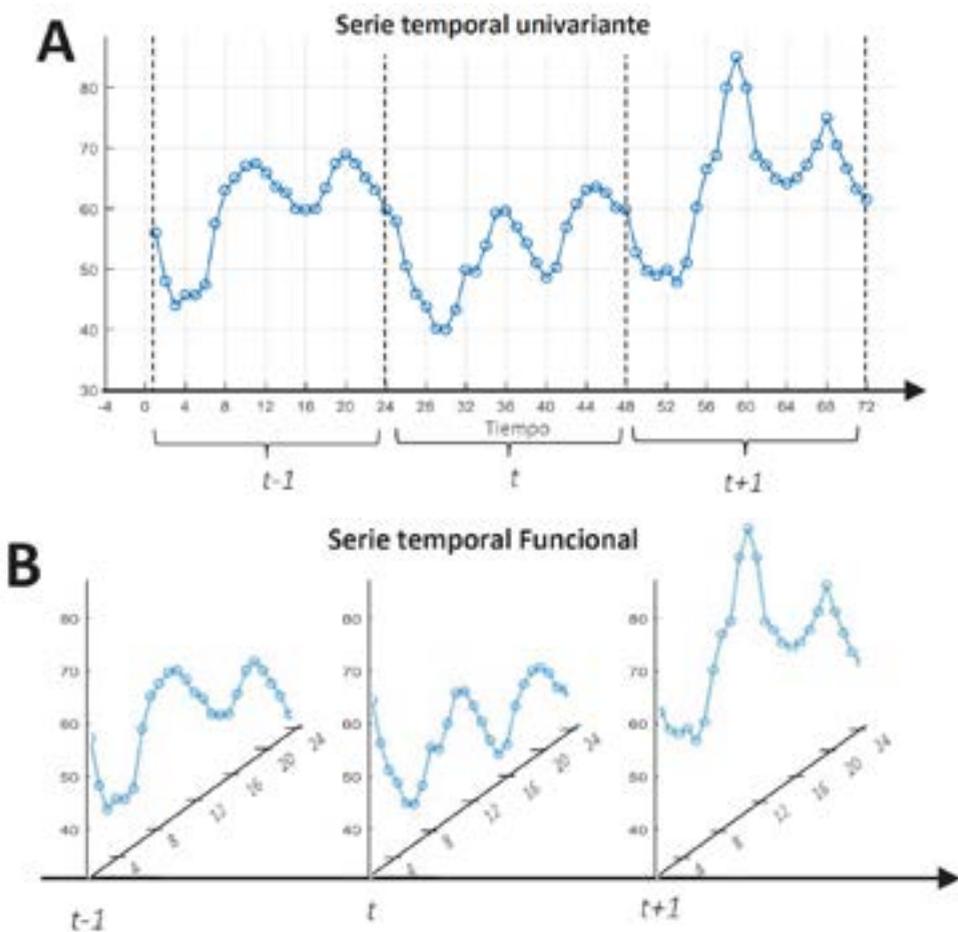
El análisis de datos funcionales (*Functional data analyses*, en inglés, o *FDA*) es el marco estadístico que proporciona las herramientas necesarias para analizar variables funcionales, donde cada observación es una función continua. Entre las diferentes ramas de *FDA*, nos vamos a enfocar en las series temporales funcionales (*Functional time series*, en inglés, o *FTS*), que son secuencias de observaciones funcionales (curvas) observadas en distintos instantes de tiempo.

Se pueden considerar dos tipos de *FTS*. Por un lado, las *FTS* pueden originarse a partir de un proceso continuo en el tiempo que se divide en segmentos de igual longitud, obteniendo una secuencia temporal de segmentos, es decir, una serie temporal funcional. Un ejemplo de este tipo de proceso sería la evolución de la temperatura en un lugar determinado como función del tiempo, que se divide en segmentos diarios, obteniendo así una secuencia de perfiles de temperatura diarios. La [figura 4](#) ilustra esta transformación del proceso continuo (Parte A) en el proceso funcional (Parte B). El otro tipo de *FTS* se

da cuando las observaciones son funciones *per se* cuyo dominio no necesariamente tiene que ser el tiempo.

Figura 4.

Series temporales escalares vs. series temporales funcionales



Notas: Parte A. Un ejemplo de una serie temporal escalar univariante. Cuando se divide en segmentos de igual longitud, se obtiene una serie temporal funcional. Parte B. Series temporales funcionales. Para cada instante de tiempo t , se observa una función continua.

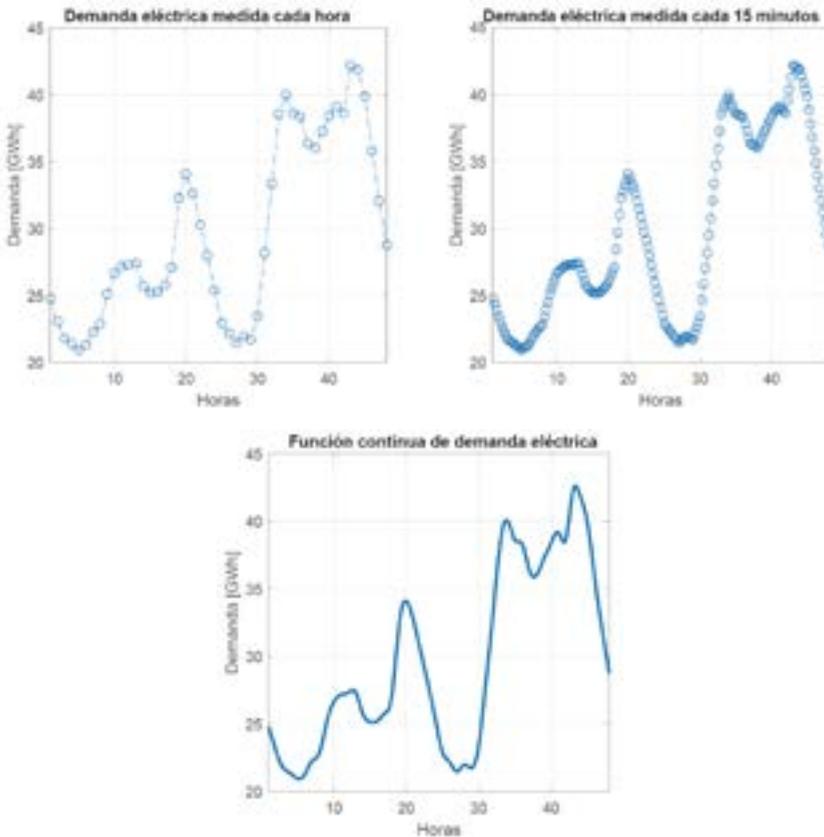
Fuente: Portela (2017).

Las series temporales funcionales también se pueden encontrar en numerosas aplicaciones de predicción en los mercados de electricidad. A continuación, se detallan algunos ejemplos:

- **Demanda de energía eléctrica.** El consumo de energía es un proceso continuo en el tiempo que puede ser analizado con métodos de análisis de datos funcionales. La predicción a corto plazo de la demanda es crucial para los agentes del mercado y los operadores del sistema. En los últimos años, la medición inteligente está aumentando la frecuencia de muestreo del consumo de electricidad de valores horarios a datos cada media hora o cada pocos minutos, como se representa en la [figura 5](#). Por lo tanto, la predicción de la demanda está evolucionando hacia una predicción continua. Algunas aplicaciones de *FDA* a la predicción de la demanda eléctrica se pueden ver en Paparoditis y Sapatinas (2013).

Figura 5.

El efecto de la medición inteligente en la demanda de electricidad



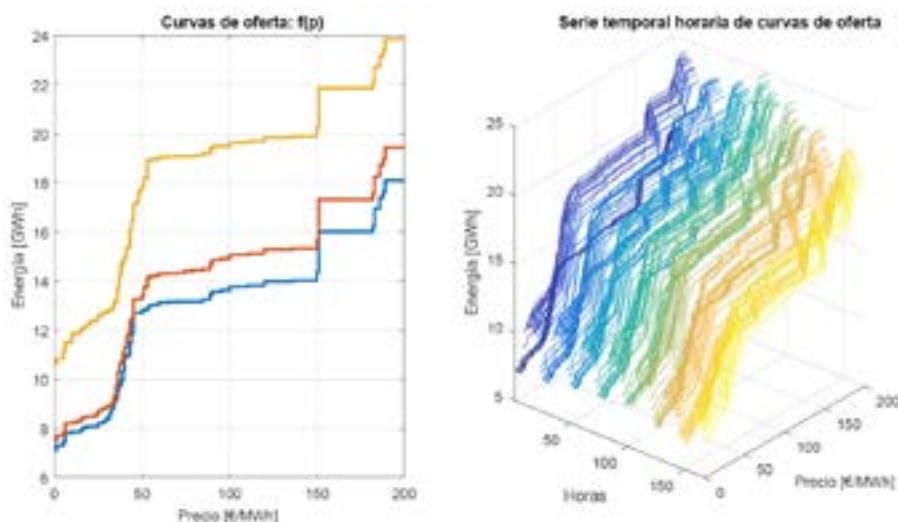
Nota: Tradicionalmente, se disponía de mediciones horarias. Con los medidores inteligentes, la frecuencia de muestreo se acerca a la función continua.

Fuente: Portela (2017).

- **Precios de la electricidad.** Hemos mencionado anteriormente la relevancia de obtener predicciones de precios de casación de los mercados eléctricos. Aunque la serie temporal resultante de los precios horarios sea discreta, la secuencia de perfiles de precios diarios puede analizarse como una serie temporal funcional. Se pueden encontrar algunos ejemplos de predicción de precios con un enfoque funcional en Vilar *et al.* (2012), Liebl (2013) y Galeano (2021).
- **Curvas de oferta.** En la gran mayoría de los mercados eléctricos, como es el caso del mercado ibérico o italiano, las ofertas de compra y venta de energía ofertadas por los agentes son publicadas diariamente. Esta información permite construir curvas agregadas de oferta, dando lugar a series temporales que por su propia naturaleza son funcionales. La **figura 6** muestra un ejemplo visual de curvas agregadas de venta horarias, donde se puede observar que son curvas escalonadas no decrecientes.

Figura 6.

Curvas de oferta en los mercados de electricidad



Nota: A la izquierda, se muestran tres curvas de oferta definidas en el rango de precios de 0 a 200 euros/MWh. A la derecha, se traza la secuencia horaria de curvas de oferta para una semana. Para cada hora, se observa una función definida en el rango de precios de 0 a 200 euros/MWh.

Fuente: Portela (2017).

- **Curvas de demanda residual.** Una curva de demanda residual expresa el precio de casación del mercado como una función de la cantidad de energía que el agente está dispuesto a comprar o vender. De manera similar a las curvas de oferta, se obtiene una función (curva) para cada hora y los agentes pueden usar predicciones de las RDC para optimizar su estrategia de oferta (Campos *et al.*, 2016). El enfoque funcional

se ajusta a esta aplicación, como se muestra en Aneiros *et al.* (2013), que hace uso de métodos no paramétricos funcionales.

Estas series temporales que surgen en el ámbito de los mercados de electricidad comparten algunos factores comunes. El efecto de las actividades comerciales y cotidianas conduce a estacionalidades semanales y diarias. Además, hay variables explicativas que afectan de forma causal a muchas de estas series. Por ejemplo, el clima (velocidad del viento, precipitaciones, etc.) afecta la producción de tecnologías renovables con costes de generación más bajos, influyendo en el comportamiento de oferta de los agentes y, por tanto, al precio de casación. En consecuencia, el desarrollo de modelos de predicción funcional para los mercados de electricidad debe tener en cuenta estas propiedades y considerar el efecto de las variables exógenas y la estacionalidad, entre otros.

En la literatura sobre predicción de series temporales funcionales se pueden encontrar algunos modelos de referencia que podrían aplicarse en los mercados de electricidad. La siguiente sección se centrará en realizar una revisión de los diferentes enfoques más comunes.

2.1. Predicción de series temporales funcionales

En las últimas dos décadas hemos sido testigos de un creciente interés por los modelos de predicción de series temporales funcionales, así como del desarrollo de nuevas técnicas para modelar las dinámicas complejas que, a menudo, exhiben estas series. Esta sección está dedicada a revisar las diferentes técnicas de modelado encontradas en la literatura de datos funcionales, clasificándolas en diferentes grupos según las herramientas estadísticas que utilizan: reducción de dimensionalidad, métodos de estimación no paramétricos y métodos paramétricos.

2.1.1. Modelos basados en reducción de la dimensión

Un enfoque común para predecir series temporales funcionales es proyectar las observaciones funcionales en un espacio finito-dimensional adecuado para aplicar modelos multivariantes y así estimar valores futuros de la serie.

En la mayoría de las aplicaciones, las curvas se proyectan en sus primeras componentes principales funcionales (*Functional principal components*, en inglés, *FPC*) (ver Hall *et al.*, 2006; Yao *et al.*, 2005, para más información), reduciendo efectivamente la dimensión de los datos. De esta forma, cada observación $Y_t(v)$ de la serie temporal funcional se puede representar de forma aproximada como una combinación lineal de las K autofunciones $\phi_j(v)$, $j = 1 \dots K$, lo que se conoce como la representación de Karhunen-Loève (ver Yao *et al.*, 2005, para más detalle).

$$Y_t(v) \approx \sum_{j=1}^K \xi_{t,j} \phi_j(v), \quad [2]$$

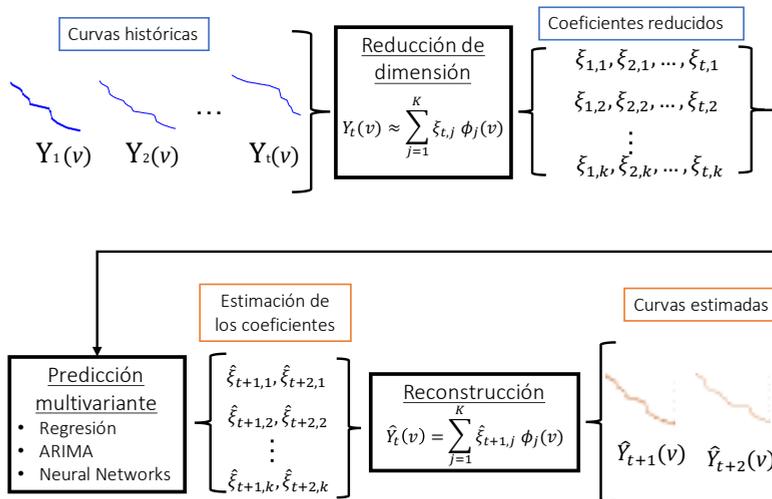
donde $\xi_{t,j}$ son las coordenadas o *scores* para cada curva t en la base de autofunciones. De esta forma, la serie funcional original se transforma en un conjunto de series temporales multivariantes en el cual se pueden aplicar modelos de predicción de serie temporal escalar para predecir los valores futuros de las coordenadas $\hat{\xi}_{t+1,j}$. Luego, se pueden reconstruir las curvas futuras estimadas como:

$$\hat{Y}_{t+1}(v) = \sum_{j=1}^K \hat{\xi}_{t+1,j} \phi_j(v). \quad [3]$$

La **figura 7** ilustra este proceso de descomposición en componentes principales, su predicción y su posterior reconstrucción.

Figura 7.

Proceso de predicción de series funcionales basado en técnicas de reducción de la dimensión por componentes principales funcionales



Fuente: Elaboración propia.

Los modelos de predicción funcionales basados en la reducción de la dimensionalidad se pueden clasificar según los métodos de predicción utilizados para estimar las series temporales de coeficientes. Por ejemplo, Erbas *et al.* (2007), Hyndman y Shang (2009), Hyndman y Ullah (2007), Valderrama *et al.* (2002), Wagner-Muns *et al.* (2018) proyectan las curvas en el espacio abarcado por las primeras componentes principales funcionales de la serie temporal funcional y luego ajustan modelos ARIMA univariantes a cada serie de coeficientes. También se pueden aplicar modelos autorregresivos vectoriales como en Aue *et al.* (2015), Klepsch *et al.* (2017), Sen y Klüppelberg (2019) o incluir variables explicativas para la predicción como en Aue *et al.* (2015). El trabajo de Shang (2012) resume diferentes técnicas de predicción funcional que involucran métodos de descomposición en FPC.

2.1.2. Modelos no-paramétricos

A diferencia de la metodología anterior, los modelos no paramétricos y paramétricos no reducen explícitamente la dimensión del conjunto de datos funcional original. Estas técnicas asumen que la serie temporal funcional sigue algún tipo de relación donde se utilizan operadores lineales funcionales para modelar esta dependencia temporal. El modelo de referencia para predecir series temporales funcionales es el proceso de Hilbert autorregresivo de orden 1, véase Bosq (2000), denotado por ARH(1), que se define como:

$$Y_t = \Psi(Y_{t-1}) + \varepsilon_t. \quad [4]$$

Aquí, Ψ es el operador autorregresivo que necesita ser estimado y ε_t denota un proceso de ruido blanco funcional. Según las técnicas utilizadas para estimar estos operadores lineales, los modelos de predicción funcional pueden clasificarse como modelos paramétricos o no paramétricos.

El marco no paramétrico no asume una estructura fija para los operadores lineales, sino que realiza una ponderación local de las variables de entrada para estimar los operadores del modelo (Ferraty y Vieu, 2006). El estimador de kernel de Nadaraya-Watson (Nadaraya, 1964; Watson, 1964) se utiliza a menudo para realizar esta ponderación local de las variables, seleccionando los valores históricos más similares en el conjunto de datos disponible para predecir situaciones futuras. Como tal, el operador ARH(1) se puede estimar como:

$$\hat{\psi}(Y_{t-1}) = \sum_{j=1}^{t-2} \omega_h(Y_{t-1}, Y_j) Y_{j+1} \quad [5]$$

siendo $\omega_h(\cdot, \cdot)$ la función de ponderación dada por

$$\omega_h(Y_{t-1}, Y_j) = \frac{K(h^{-1}d(Y_{t-1}, Y_j))}{\sum_{i=1}^{t-2} K(h^{-1}d(Y_{t-1}, Y_i))}, \quad [6]$$

donde K denota una función kernel (como la función de densidad gaussiana estándar) y $h > 0$ se llama el parámetro de ancho de banda del kernel, que representa el nivel de suavizado que se aplicará a los datos y necesita ser estimado a partir de una muestra. La expresión [5] puede interpretarse como una media ponderada de observaciones funcionales pasadas, donde la similitud entre las observaciones se cuantifica mediante la función de distancia $d(\cdot, \cdot)$. La elección de dicha función de distancia es crítica, ya que se utilizará para resaltar las características relevantes de las curvas.

La monografía de Ferraty y Vieu (2006) proporciona una excelente introducción a las técnicas no paramétricas que ayudaron a popularizar estos métodos estadísticos. En aplicaciones del mundo real, la inclusión de covariables exógenas es de suma importancia, ya que a menudo son los principales impulsores de las series temporales funcionales. Aneiros y Vieu (2008) introdujeron un modelo semiparamétrico que permite la inclusión de variables exógenas en el modelo autorregresivo no paramétrico. Este modelo ha sido aplicado con éxito en la

predicción de la demanda y el precio de la electricidad (Aneiros *et al.*, 2016; Vilar *et al.*, 2018; Vilar *et al.*, 2012) y en la predicción no paramétrica de curvas de demanda residual (Aneiros *et al.*, 2013).

2.1.3. Modelos paramétricos

Según Ferraty y Vieu (2006), los modelos paramétricos para la predicción de series temporales funcionales pueden definirse como modelos que asumen que los operadores que aparecen en la formulación del modelo de predicción pertenecen a alguna familia conocida, como los operadores integrales.

Los operadores integrales aparecen, por ejemplo, en la extensión del modelo de regresión a datos funcionales. Considerando dos variables funcionales $X(u)$ y $Y(v)$ con media cero, este modelo relaciona la variable de salida funcional $Y(v)$, definida en algún intervalo $v \in V_Y$, con la variable de entrada funcional $X(u)$, definida en algún intervalo $u \in V_X$. El operador integral $\Psi(\cdot)$, por tanto, tiene la forma:

$$Y(v) = \Psi(X)(v) = \int \psi(u, v)X(u)du,$$

donde $\Psi(X(u))$ pertenece a la clase de operadores lineales en L^2 llamados operadores integrales. $\psi(u, v)$ es el núcleo del operador y puede considerarse como el parámetro funcional. La **figura 8** muestra una representación visual de un operador integral funcional. En cualquier punto dado v , el valor de $Y(v)$ depende de toda la trayectoria de $X(u)$. Es una extensión directa de los modelos lineales tradicionales con respuesta multivariante y covariables vectoriales.

El enfoque más habitual en la literatura para estimar el parámetro funcional es proyectar el kernel de regresión en alguna base funcional:

$$\psi(u, v) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M b_{l,m} e_l(u) f_m(v),$$

donde $b_{l,m}$ son coeficientes escalares y e_l y f_m son algunas funciones base que no necesitan ser ortonormales. Las funciones base e_l y f_m suelen ser elegidas por el usuario, y los parámetros $b_{l,m}$ se optimizan para minimizar el error de predicción. Las funciones base más comúnmente utilizadas son las componentes principales funcionales (Faraway, 1997), aunque también hay otras opciones disponibles como se ve en Antoch *et al.* (2010) que utiliza un estimador de B-spline.

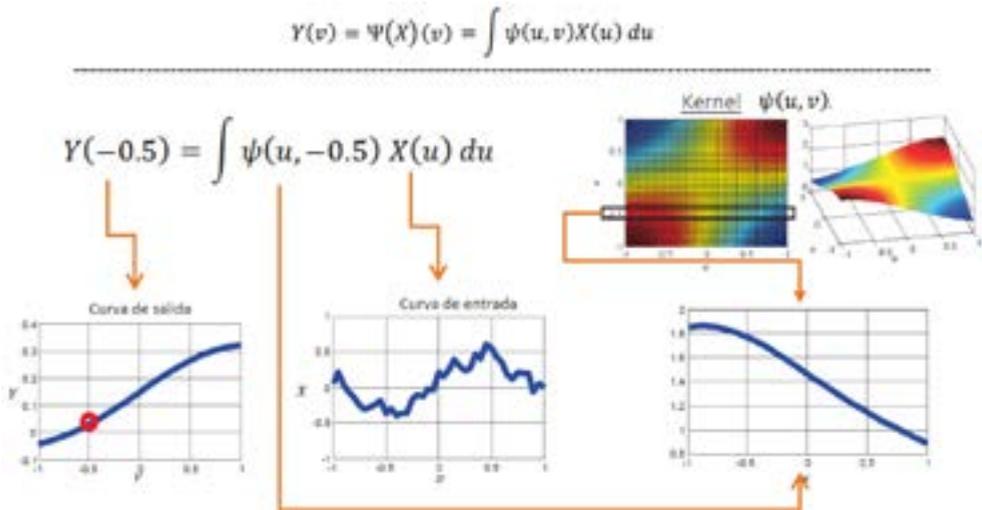
En cuanto al proceso autorregresivo de orden uno ARH(1) de la ecuación [4], Bosq (2000) propone estimar Ψ utilizando un conjunto equivalente de ecuaciones de Yule-Walker para datos funcionales. El resultado es un operador integral cuya función kernel toma la forma

$$\hat{\psi}(u, v) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \hat{\lambda}^{-1} \langle Y_t, \hat{\phi}_j \rangle \langle Y_{t+1}, \hat{\phi}_i \rangle \hat{\phi}_j(u) \hat{\phi}_i(v), \quad [7]$$

donde $\{\hat{\lambda}_j\}_{j=1}^M$ denota los autovalores estimados del operador de covarianza de los datos y $\{\hat{\phi}_j\}_{j=1}^M$ son las primeras componentes principales funcionales de la serie de curvas. Esto puede interpretarse como encontrar las coordenadas óptimas de la función de kernel $\hat{\psi}(u, v)$ cuando se proyecta en la base funcional definida por las primeras componentes principales del conjunto de datos funcional.

Figura 8.

Representación visual de un operador integral funcional



Nota: En el ejemplo, la curva de salida Y en el punto $(-0.5, 0.1)$ es el resultado de la integral de la multiplicación de la entrada X y la rebanada del operador en -0.5 .

Fuente: Portela (2017).

Este modelo ha sido ampliamente estudiado en la literatura. Por ejemplo, Mas (2007) y Álvarez *et al.* (2017) analizan las propiedades asintóticas del modelo ARH(1). Otros métodos de estimación para el modelo ARH(1) se ilustran en Didericksen *et al.* (2012) o Kargin y Onatski (2008). El trabajo de Horváth *et al.* (2020) compara las capacidades predictivas de varias de estas técnicas de estimación en una aplicación financiera del mundo real.

Sin embargo, en muchas aplicaciones el modelo ARH(1) puede no ser suficiente, ya que la dependencia temporal que exhiben las curvas puede estar influenciada por distintos retardos de la serie temporal funcional. Los trabajos de Bosq (2000), Mourid (2002) proporcionan un estudio en profundidad de los procesos autorregresivos funcionales de orden $p > 1$, denominados como ARH(p).

La inclusión de covariables exógenas en el modelo ARH(p) fue analizada en Damon y Guillas (2002, 2005), donde los autores analizan las propiedades teóricas y empíricas de este modelo. Este modelo, denominado como ARHX(p), se puede formular como:

$$Y_t = \sum_{j=1}^p \Psi_j(Y_{t-j}) + \sum_{z=1}^Z \Gamma_z(X_t^z) + \varepsilon_t, \quad [8]$$

donde Ψ_j son los operadores autorregresivos, Γ_z denota el operador de regresión asociado con la covariable funcional X_t^z y ε_t son las innovaciones i.i.d. del modelo. El modelo de media móvil funcional MAH(1) fue introducido en Turbillon *et al.* (2007). Además, Klepsch *et al.* (2017) estudian el modelo ARMA funcional, denotado por ARMAH(p, q). Los autores aproximan el modelo:

$$Y_t = \sum_{j=1}^p \Psi_j(Y_{t-j}) + \sum_{i=1}^q \Theta_i(\varepsilon_{t-i}) + \varepsilon_t \quad [9]$$

por un modelo ARMA vectorial, obtenido después de proyectar ambas curvas, innovaciones y operadores en el espacio abarcado por el FPC de las series temporales funcionales originales.

Sin embargo, para modelar las dinámicas estacionales presentes en las series funcionales del mercado diario, Portela (2017) y Portela *et al.* (2018) proponen el modelo SARMAHX, un modelo paramétrico que es una generalización del modelo ARMA estacional escalar con covariables exógenas. Dado que ha demostrado ser un modelo competitivo en comparación con otros modelos de predicción de referencia gracias a su capacidad para capturar dinámicas complejas, la siguiente sección presentará este modelo junto con sus principales propiedades y suposiciones.

2.2. El modelo SARMAHX

El modelo funcional SARMAHX se define siguiendo el enfoque estándar de modelado de series temporales propuesto en Box *et al.* (2008), pero extendido a series temporales funcionales utilizando operadores integrales. El modelo SARMAHX generaliza el modelo ARMAX escalar extendiendo el modelo escalar a series temporales funcionales utilizando operadores integrales definidos en el espacio de Hilbert L^2 como los parámetros del modelo. Mientras que los parámetros del modelo ARMAX clásico son valores escalares, los parámetros del modelo SARMAHX son operadores funcionales que modelan la relación entre las curvas de entrada y salida. Para estimar estos parámetros, se propuso una nueva metodología en Portela (2017), que difiere sustancialmente de los métodos de estimación paramétrica descritos en la sección anterior.

Para más detalles, pueden referirse a Portela (2017) y Mestre *et al.* (2020).

2.2.1. Formulación del modelo

El modelo SARMAHX(P_0, Q_0) \times (P_1, Q_1) $_{s_1}$ \times (P_2, Q_2) $_{s_2}$ es un modelo funcional autorregresivo de media móvil en espacio de Hilbert con dos estacionalidades (aunque podría gene-

realizarse a cualquier número de estacionalidades) que incluye tanto variables explicativas funcionales como escalares. La expresión completa para el modelo se define de la siguiente manera:

$$\prod_{j=0}^2 \left(I - \sum_{i=1}^{P_j} \Psi_{j,i} B^{i \cdot s_j} \right) (Y_t) = \prod_{k=0}^2 \left(I - \sum_{l=1}^{Q_k} \Theta_{k,l} B^{l \cdot s_k} \right) (\varepsilon_t) + \sum_{z=1}^{Z_f} \Gamma_z^f (X_t^z) + \sum_{z=1}^{Z_c} \Gamma_z^c (x_t^z), \quad [10]$$

donde:

- $\{Y_t(\nu); t = 1, 2, \dots, T; \nu \in V\}$ es una serie temporal funcional estacionaria de media cero.
- $\{X_t^z(\nu_z); z = 1, 2, \dots, Z_f; t = 1, 2, \dots, T; \nu_z \in V_z\}$ un conjunto Z_f de variables exógenas funcionales.
- $\{x_t^z; z = 1, 2, \dots, Z_c; t = 1, 2, \dots, T\}$ un conjunto Z_c de variables exógenas escalares.
- ε_t un proceso de ruido blanco funcional.
- I es el operador identidad.
- Los parámetros P_0, P_1 y P_2 son los órdenes autorregresivos regular y estacionales, respectivamente.
- Los parámetros Q_0, Q_1 y Q_2 son los órdenes de media móvil regular y estacionales, respectivamente.
- Los parámetros s_1 y s_2 son los períodos estacionales. El parámetro s_0 es igual a 0.
- $\Psi_{0,i}, \Psi_{1,i}$ y $\Psi_{2,i}$ son los operadores autorregresivos regulares y estacionales.
- $\Theta_{0,l}, \Theta_{1,l}$ y $\Theta_{2,l}$ son los operadores de media móvil regulares y estacionales.
- Γ_z^f son los operadores relacionados con las variables explicativas Z_f .
- Γ_z^c son los operadores relacionados con las variables explicativas Z_c .
- B^n es el operador de retardo que se define como $B^n Y_t = Y_{t-n}$ donde $n \in \mathbb{N}$. Si se utilizan operadores integrales definidos en el espacio L^2 para los términos ARMA, se obtiene el modelo SARMAHX completamente funcional. Esta versión del modelo, ilustrada en Portela *et al.* (2018) en un problema de predicción de precios de electricidad, es capaz de capturar la dependencia de la correlación cruzada entre diferentes puntos de las curvas.

Es importante notar que, cuando se utiliza este modelo para la predicción, los términos asociados a la media móvil (retardos de ε_t) no se observan.

Para facilitar la comprensión del modelo SARMAHX, se detalla el siguiente ejemplo. El modelo SARMAHX(1, 1) \times (1, 0)₂₄ se definiría de la siguiente manera:

$$Y_t = \Psi_{0,1}(Y_{t-1}) + \Psi_{1,1}(Y_{t-24}) - \Psi_{0,1}\Psi_{1,1}(Y_{t-25}) - \Theta_{0,1}(\varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad [11]$$

donde los términos son, respectivamente, el autorregresivo regular, el autorregresivo estacional, la interacción estacional autorregresiva y el término de media móvil. Cabe señalar que el término $\Psi_{0,1}\Psi_{1,1}(Y_{t-25})$ denota la composición, es decir, $\Psi_{0,1}(\Psi_{1,1}(Y_{t-25}))$. Luego, sustituyendo cada operador por su expresión integral, la ecuación de predicción se convierte en:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t(v) = & \int \psi_{0,1}(u, v') Y_{t-1}(u) du + \int \psi_{1,1}(u, v') Y_{t-24}(u) du \\ & - \int \int \psi_{0,1}(v, v') \psi_{1,1}(u, v) Y_{t-25}(u) du dv \\ & - \int \theta_{0,1}(u, v') \hat{\varepsilon}_{t-1}(u) du \end{aligned} \quad [12]$$

Como se observa, el modelo resultante admite una amplia variedad de configuraciones: términos autorregresivos y de media móvil hasta dos estacionalidades, así como la inclusión de variables explicativas escalares y funcionales. Por lo tanto, este modelo es adecuado para la mayoría de las series temporales funcionales que se encuentran en muchas aplicaciones del mundo real, como la predicción de precios y demandas en los mercados de electricidad.

2.2.2. Estimación del modelo

Para ajustar el modelo SARMAHX, cada operador integral debe ser estimado a partir de los datos observados. Como ya se mencionó en la sección anterior, estimar un operador integral Ψ implica estimar la superficie del núcleo o kernel asociado $\psi(u, v)$. El modelo SARMAHX sigue un enfoque novedoso para la estimación de parámetros funcionales: cada función kernel $\psi(u, v)$ se modela como una suma finita de funciones sigmoideas (Portela, 2017, Portela *et al.*, 2018). Las funciones sigmoideas son aproximaciones universales de funciones (Cybenko, 1989) que se utilizan comúnmente en redes neuronales debido a sus propiedades para modelar relaciones no lineales. De esta manera, cada núcleo bivalente $\psi(u, v)$ puede ser modelado como:

$$\psi(u, v) = \alpha_0 + \sum_{g=1}^{G_s} \alpha_g \tanh(w_{g0} + w_{g1}u + w_{g2}v), \quad [13]$$

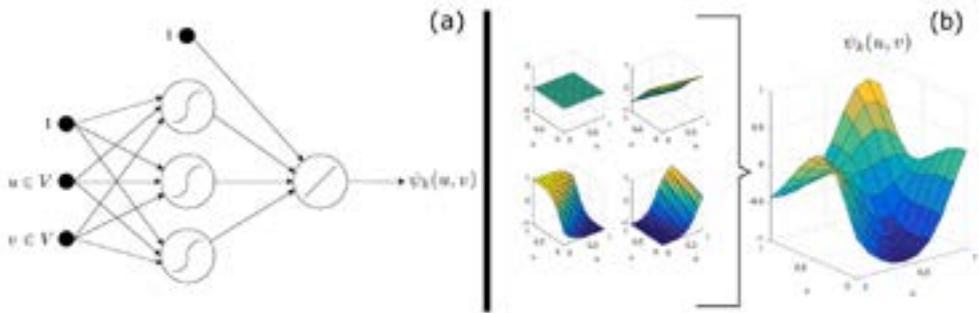
donde w_{g0} , w_{g1} , w_{g2} , α_g y α_0 son los parámetros que definen las sigmoideas y su combinación. Las variables u y v toman valores reales en los intervalos en los que se definen las variables funcionales.

En el caso de un operador concurrente (utilizado para modelar relaciones respecto de variables explicativas escalares), esta expresión se simplifica, modelando cada núcleo como una suma finita de sigmoideas:

$$\psi(v) = \alpha_0 + \sum_{g=1}^{G_s} \alpha_g \tanh(w_{g0} + w_{g1}v). \quad [14]$$

Figura 9.

Diagrama de arquitectura de la red neuronal utilizada para optimizar los parámetros funcionales del modelo SARMAHX (Parte a). Función kernel estimada como suma ponderada de 3 funciones sigmoidales y una constante (Parte b)



Fuente: Mestre (2021).

Este enfoque puede verse como una red neuronal de perceptrón multicapa (*MLP*) con una configuración particular: una capa de entrada con dos variables de entrada y un sesgo; una capa oculta con un número G_ψ de unidades ocultas no lineales con la tangente hiperbólica como función de activación y w_{g0} , w_{g1} , w_{g2} como los pesos para cada entrada. Finalmente, una capa de salida con una unidad de salida lineal que tiene α_g como los pesos para la activación de las unidades ocultas. La figura 9 (Parte a) muestra el diagrama de arquitectura de la red mencionada con $G_\psi = 3$ capas ocultas. La propiedad de las superficies sigmoidales como aproximadores universales se ilustra en la Parte b, donde una superficie bastante compleja se modela como la suma de tres funciones sigmoidales y una superficie constante que modela el nivel de la superficie final.

Se ha observado empíricamente que el uso de cinco o seis funciones sigmoidales al ajustar el modelo SARMAHX es suficiente en la gran mayoría de las aplicaciones prácticas, debido a la flexibilidad de las funciones sigmoidales.

Los parámetros (w_{g0} , w_{g1} , w_{g2} , α_g , α_0) definen completamente cada núcleo bivariado en [13]. Por lo tanto, el modelo SARMAHX propuesto se estima cuando se estiman los valores para todos estos parámetros. Para lograr esto, se ha implementado un método de Quasi Newton de baja memoria con pesos iniciales aleatorios para optimizar estos parámetros reales con el fin de minimizar una función de coste. En Portela (2017), la función de coste C para estimar el modelo SARMAHX se define como la suma de los errores cuadrados L^2 ,

$$C = \sum_{t=1}^T e_t, \quad [15]$$

donde:

$$e_t = \|Y_t - \hat{Y}_t\|_{L^2}^2 = \int (Y_t(u) - \hat{Y}_t(u))^2 du. \quad [16]$$

El método Quasi Newton implementado es un algoritmo que utiliza el gradiente para determinar la dirección de búsqueda, por lo que se necesitan las derivadas del término de error con respecto a los parámetros de las sigmoidales. Esta derivada de la función de error con respecto a un parámetro general W viene dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial W} = \sum_{t=1}^T \int 2(Y_t(u) - \hat{Y}_t(u)) \left(-\frac{\partial \hat{Y}_t(u)}{\partial W} \right) du, \quad [17]$$

donde $\frac{\partial \hat{Y}_t(u)}{\partial W}$ es la derivada parcial de la estimación con respecto al parámetro genérico W . Para reducir los tiempos de cálculo, se han obtenido expresiones analíticas para estas derivadas. Se remite al lector a Portela *et al.* (2018) para la formulación de las derivadas de la función de coste con respecto a los parámetros de peso y otros detalles de la implementación.

Por último, para evitar el sobreajuste, en el proceso de entrenamiento se utiliza la técnica del *early stopping*, obteniendo el conjunto de valores de los parámetros que obtiene un menor error en un conjunto de validación.

La inclusión de covariables exógenas (ya sean variables escalares o funcionales) y la capacidad de incluir hasta dos términos estacionales hace posible capturar las dinámicas complejas que exhiben las series temporales funcionales horarias, como las series de curvas de oferta o curvas de demanda residual.

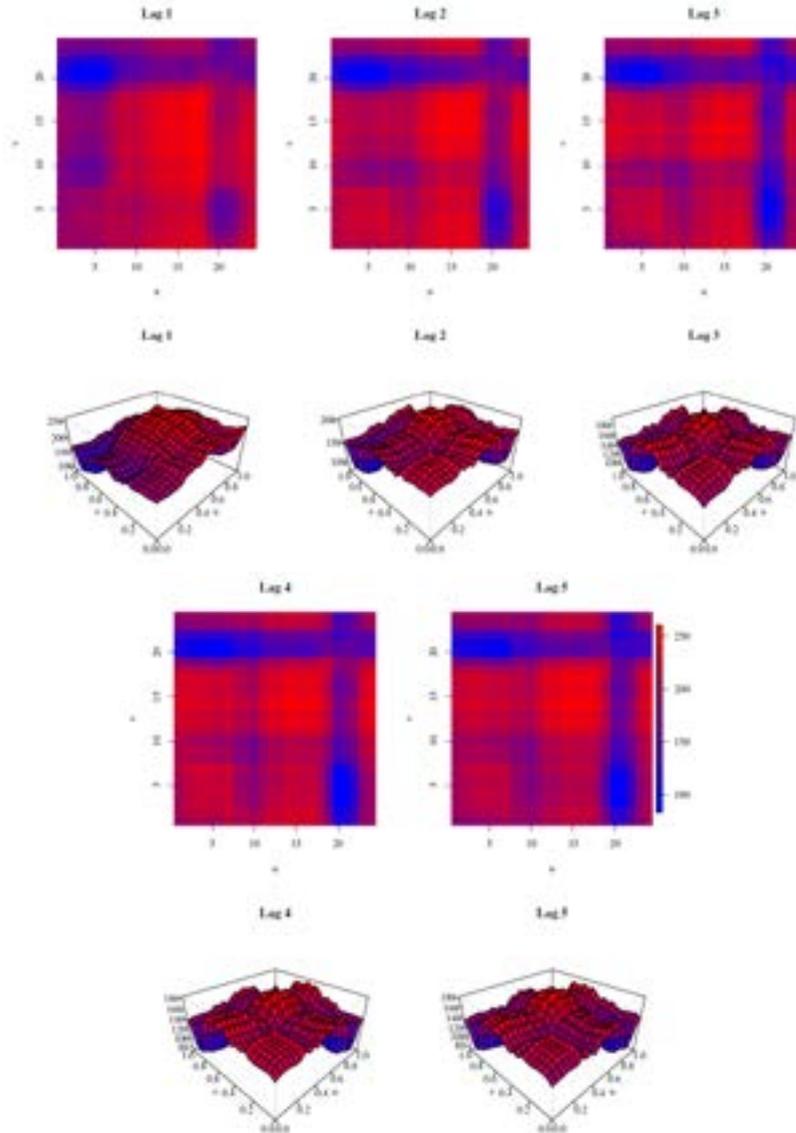
Sin embargo, antes de ajustar el modelo SARMAHX, el usuario necesita seleccionar tanto la estacionalidad presente en los datos como el orden de los términos autorregresivos y de media móvil. Por lo tanto, se presenta a continuación una técnica de identificación y diagnóstico para evaluar la adecuación de estos modelos SARMAHX funcionales.

2.3. Identificación del modelo SARMAHX

El trabajo de Mestre *et al.* (2021) desarrolla una metodología análoga a la de Box-Jenkins para la identificación de series temporales funcionales. Para ello, es fundamental caracterizar la dinámica temporal de la serie funcional, lo que suele hacerse analizando la correlación existente entre distintos retardos de la propia serie. En series temporales funcionales, se puede definir un procedimiento análogo.

Figura 10.

Primeras cinco funciones de autocovarianza retardadas para la *FTS* de los perfiles diarios de precios de la electricidad (arriba) y una representación tridimensional de las superficies (abajo)



Nota: Estas funciones proporcionan información detallada, aunque quizás difícil de interpretar, sobre la estructura de covarianza entre las curvas Y_t y Y_{t-h} .

Fuente: Mestre (2021).

En primer lugar vamos a introducir la función de autocovarianza, que mide la variación conjunta de las funciones de una *FTS* en diferentes instantes de tiempo. Se puede generalizar la estimación de la autocovarianza de una serie temporal al caso funcional como:

$$\widehat{c}_h(u, v) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-h} (Y_i(u) - \hat{\mu}(u))(Y_{i+h}(v) - \hat{\mu}(v)), \quad [18]$$

donde

$$\hat{\mu}(u) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Y_i(u) \quad [19]$$

se refiere a la media muestral funcional.

Por ejemplo, la **figura 10** ilustra las superficies de autocovarianza para diferentes retardos de los perfiles diarios de precios de la electricidad del mercado eléctrico español en 2014. Se puede observar que los precios de la electricidad para las horas 12 a 18 están correlacionados con las curvas pasadas, y que las horas 19 a 22 están menos influenciadas por las curvas de precios anteriores.

A partir de esta función de autocovarianza, y siguiendo a Kokoszka *et al.* (2017), se puede estimar el coeficiente de autocorrelación funcional para el retardo h como:

$$\widehat{\rho}_h = \frac{\|\widehat{c}_h\|}{\int \widehat{c}_h(u, u) du}, \|\widehat{c}_h\|^2 = \int \int \widehat{c}_h^2(u, v) dudv. \quad [20]$$

Dado que un proceso de ruido blanco funcional no exhibe autocorrelación entre sus términos, la norma de sus operadores de autocovarianza retardados debe ser cercana a cero para cada retardo positivo h . En Mestre *et al.* (2021), se indica un procedimiento para obtener los límites de confianza para los valores de $\widehat{\rho}_h$ bajo la hipótesis de que la serie es ruido blanco.

Los métodos clásicos de identificación para series temporales escalares, como la metodología de Box–Jenkins (Box *et al.*, 2008), utilizan las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial muestrales de la serie temporal para comprobar la hipótesis de ruido blanco del residuo y para identificar la estructura de correlación subyacente de la serie temporal. Así, por ejemplo, el patrón de decrecimiento de la autocorrelación y los retardos específicos con una fuerte autocorrelación pueden ser utilizados para seleccionar los órdenes adecuados de autorregresión y de media móvil en los modelos de series temporales ARIMA.

Una vez definida la función de autocorrelación funcional simple, se puede definir una función de autocorrelación parcial funcional de forma análoga a como se define en el caso escalar. En Mestre *et al.* (2021) se desarrolla la teoría funcional para la construcción de la fun-

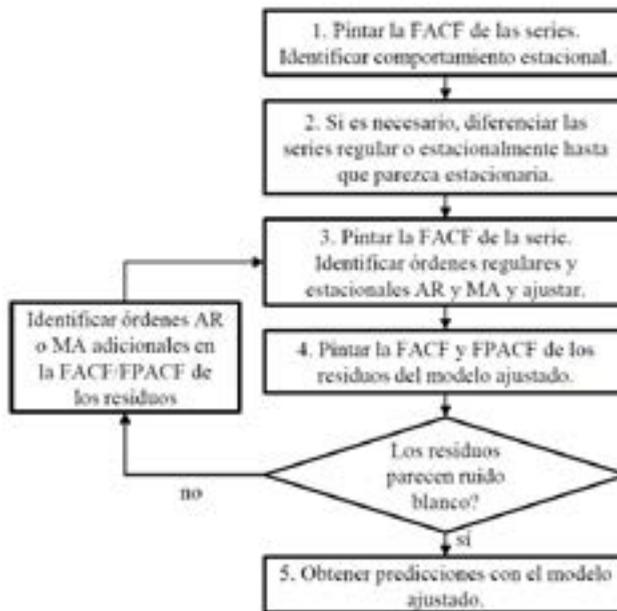
ción de autocorrelación parcial funcional (*FPACF*) y la obtención de un límite de confianza bajo la hipótesis de que la serie es ruido blanco funcional.

Los métodos para estimar las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial presentados para datos funcionales se encuentran implementados en el paquete de R *fdaACF*, disponible en CRAN (<http://cran.r-project.org/package=fdaACF>).

Este procedimiento de identificación y diagnóstico se ilustra en la [figura 11](#).

Figura 11.

Procedimiento general para identificar y diagnosticar un modelo SARMAHX usando las *FACF* y *FPACF* propuestas

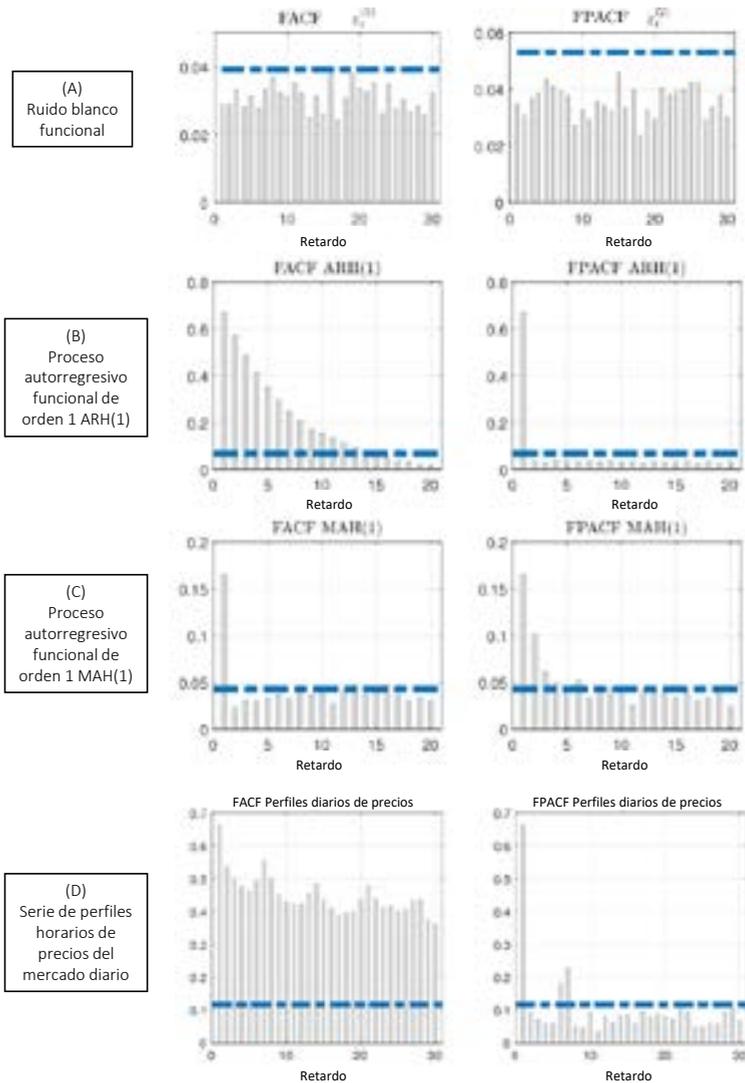


Fuente: Mestre (2021).

La [figura 12](#) muestra las funciones de autocorrelación simple y parcial para distintas series de diferente naturaleza. La *FACF* y la *FPACF* introducidas se pueden utilizar para identificar la configuración óptima de los órdenes de autorregresión y de media móvil del modelo SARMAHX para una *FTS* dada, obteniendo predicciones más precisas de las curvas.

Figura 12.

Ejemplos de funciones de autocorrelación funcional (FACF) y autocorrelación funcional parcial (FPACF) para series de distinta naturaleza: proceso de ruido blanco funcional, proceso autorregresivo, proceso de media móvil y serie de perfiles de precios del mercado diario. Se puede observar en esta última cómo se aprecia el efecto estacional de periodicidad semanal (siete muestras)



Fuente: Elaboración propia a partir de Mestre (2021).

3. APLICACIÓN AL MERCADO ELÉCTRICO EUROPEO: PREDICCIÓN DE CURVAS DE OFERTA EN EL MERCADO ELÉCTRICO ITALIANO

Esta sección está dedicada a la predicción a corto plazo de las curvas de oferta agregadas por hora en los mercados de electricidad aplicando los modelos de predicción funcionales presentados anteriormente. En concreto, se ilustrará la aplicación a un caso de predicción dentro del mercado eléctrico italiano. En primer lugar, se presentarán las particularidades del mercado eléctrico de Italia y, posteriormente, se definirá el caso estudio. Finalmente, se comentarán los resultados y las conclusiones.

3.1. El mercado eléctrico italiano

El Mercado diario italiano (*Mercato del giorno prima - MGP*) es el mercado donde se gestionan las ofertas de compra y venta de electricidad en Italia para cada hora del día siguiente. El sistema eléctrico italiano se divide en siete zonas: Norte, Centro-Norte, Centro-Sur, Sur, Calabria, Sicilia y Cerdeña. Antes del cierre del mercado, los participantes presentan sus ofertas donde especifican la cantidad y el precio máximo y mínimo al que están dispuestos a comprar y a vender respectivamente la electricidad para cada zona y para cada subasta horaria del día siguiente. Además, las zonas italianas están interconectadas con las de países europeos cercanos, como Francia, Suiza, Austria, Eslovenia, Córcega, Montenegro, Grecia y Malta.

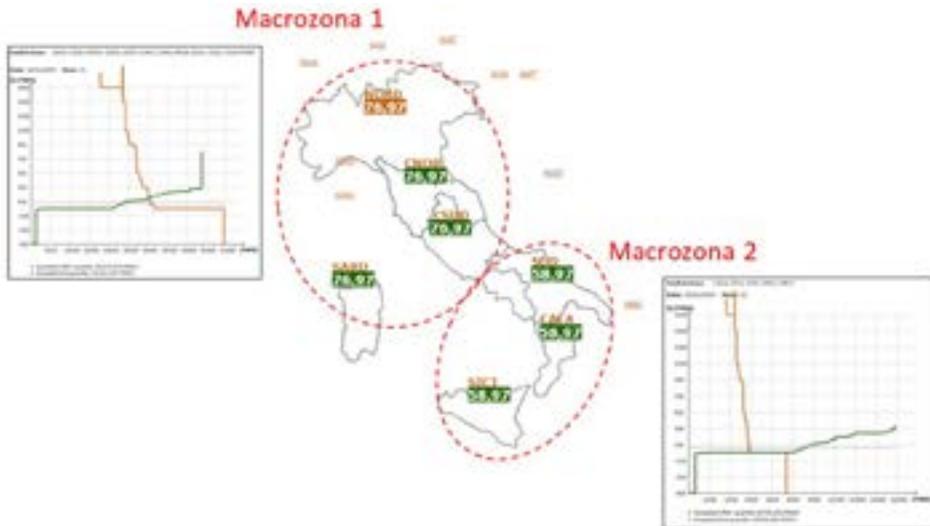
Estas zonas de mercado reflejan las diferencias entre la oferta y la demanda de electricidad en distintas áreas geográficas y tienen implicaciones directas en la formación de precios. Por ejemplo, en aquellas zonas donde la oferta supera a la demanda, los precios tienden a ser más bajos, y viceversa. Este sistema de precios diferenciales incentiva a los productores a establecer nuevas plantas en zonas con menor oferta, lo cual no solo aumenta la eficiencia del mercado sino que también mejora la oferta general de electricidad en esa zona.

Una vez que el *MGP* cierra, las ofertas de compra y de venta son aceptadas basándose en el criterio marginalista y teniendo en cuenta los límites de capacidad de transmisión entre zonas. Estas restricciones de capacidad son vinculantes. En caso de existir una saturación de la interconexión, el mercado se divide y se determinan precios de casación distintos para cada agrupación de zonas (*macrozona*). Estas *macrozonas* pueden ser distintas para cada hora del día. Las **figuras 13 y 14** muestran el resultado del mercado para dos días diferentes. En el primero, se observan dos *macrozonas* de precios distintos, mientras que en el segundo caso, el resultado del mercado ha generado tres *macrozonas*.

Mientras que los generadores son remunerados al precio zonal resultante, las ofertas de demanda aceptadas que pertenecen a unidades de consumo se evalúan al precio nacional único (*PUN*) que se calcula como el promedio de los precios zonales ponderados por el consumo zonal (Gianfreda y Grossi, 2012).

Figura 13.

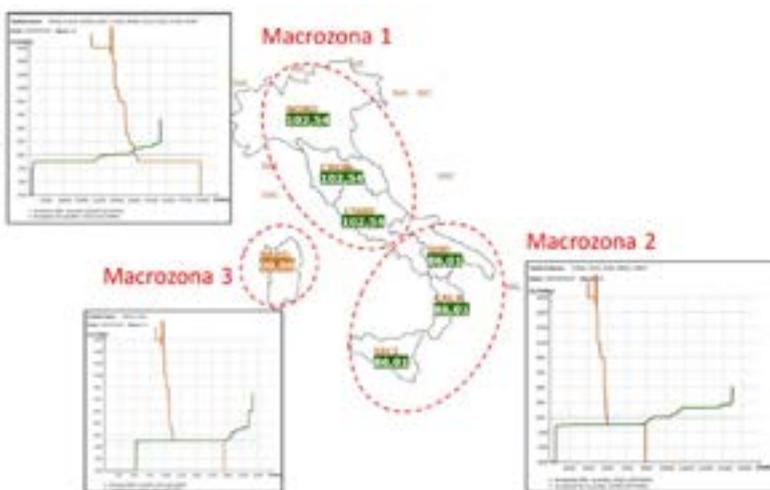
Hora 12 del día 3/11/2023 donde se han creado dos *macrozonas* con precios diferentes



Fuente: Elaboración propia.

Figura 14.

Hora 12 del día 5/9/2023 donde se han creado tres *macrozonas* con precios diferentes



Fuente: Elaboración propia.

Como se señala en Shah y Lisi (2019), debido a las políticas de confidencialidad, el Operador del Mercado Italiano (GME) no publica la información detallada relativa a las ofertas de compra y venta en un período de confidencialidad de siete días, a partir del día siguiente al cierre de la sesión del mercado a la que se refieren. Sin embargo, para los participantes del mercado, los resultados confidenciales anonimizados (incluyendo la aceptación/rechazo de las ofertas y las curvas de oferta agregadas sin información sobre la zona geográfica de cada oferta) están disponibles en <https://www.IPEX.it>.

3.2. Definición del caso de estudio

A pesar de que el mercado italiano consta de siete zonas interconectadas, por simplicidad y siguiendo a Pelagatti (2012), en este estudio se considera el mercado italiano como un único mercado, como si no hubiera restricciones de saturación entre zonas.

Se define como objetivo predecir las curvas de oferta para los competidores de una importante compañía eléctrica en Italia, que se obtienen agregando todas las curvas de oferta de los competidores zonales. Para este estudio, las curvas de oferta se limitan al rango de precios [0, 200] euros/MWh. Por lo tanto, cada observación funcional es la curva de oferta agregada presentada al mercado en cada hora. El rango de tiempo de los datos es desde el 01/03/2015 hasta el 29/02/2016, consistiendo así en 8784 curvas. Los datos se han obtenido del Operador del Mercado de Electricidad Italiano (<https://gme.mercatoelettrico.org>) y se dividen en dos conjuntos. El período de ajuste (*in-sample*) se considera desde el 01/03/2015 hasta el 31/08/2015, que se utilizará para entrenar los modelos. Los datos restantes se dejan para el período de test (*out-of-sample*).

El comportamiento de oferta de los agentes se ve afectado por las condiciones climáticas que afectan a la demanda, la generación eólica y solar, así como las circunstancias particulares de cada día. En consecuencia, se utilizan variables explicativas como una forma de tener en cuenta los factores externos que podrían influir en la decisión de los comerciantes. Las variables explicativas utilizadas en este estudio son las siguientes:

- **Demanda:** demanda total de electricidad de Italia. La demanda es de suma importancia para tener en cuenta el consumo de energía en el país.
- **Eólica:** producción total de energía eólica. El sur de Italia alberga un gran número de parques eólicos que tienen un impacto significativo en las curvas de oferta en días ventosos.
- **Solar:** producción total solar. El norte de Italia es la región con la mayor capacidad de energía solar instalada. Por lo tanto, la producción solar debería ser significativa.
- **Disponibilidad térmica:** es la suma de toda la energía ofrecida en el mercado por unidades térmicas.

- **Intercambios internacionales:** energía intercambiada con los países europeos adyacentes: Francia, Suiza, Austria, Eslovenia, Grecia y Malta. Estos intercambios juegan un papel muy importante en la comercialización de energía en Italia.

Vale la pena señalar que se utilizan valores reales de las variables explicativas, en lugar de predicciones, tanto para el entrenamiento como para la validación de todos los modelos considerados en este estudio. En la operación real, los valores actuales de estas variables son desconocidos, por lo que se deben utilizar escenarios futuros de las variables exógenas. El Operador del Mercado Italiano publica predicciones horarias de la demanda total de electricidad e intercambios internacionales para el día $D + 1$ en el día D , por lo que los modelos propuestos las pueden utilizar para obtener estimaciones de las curvas de oferta horarias antes de que se cierre la subasta para el día $D + 1$. Otras variables, como la disponibilidad térmica y la producción solar y eólica, deben ser estimadas para usarlas como entradas para los modelos de predicción.

Estos modelos proporcionan indicadores útiles para cualquier agente del mercado, por lo tanto, en este capítulo se asume que los participantes del mercado ya tienen predicciones de estas variables. Se puede obtener información histórica sobre las variables mencionadas de la Plataforma de Transparencia de ENTSO-E, la Red Europea de Operadores de Sistemas de Transmisión (<https://transparency.entsoe.eu/>). Dado que las series temporales de salida son curvas horarias y estas variables explicativas son valores horarios, el modelo las considerará como covariables escalares y no como covariables funcionales.

3.3. Identificación del modelo SARMAHX

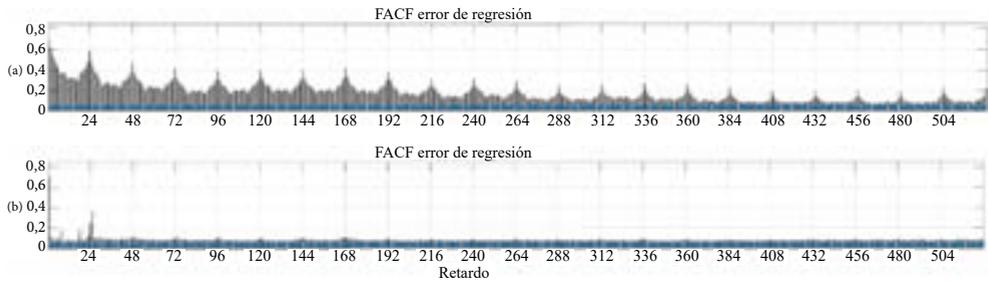
La técnica de identificación y diagnóstico presentada se utiliza para identificar el modelo funcional SARMAHX. Una vez seleccionados los órdenes de media móvil y autorregresivos regulares y estacionales del modelo, el modelo se entrena con los datos del periodo de ajuste de este caso de estudio. En primer lugar, se identifica la estructura de autocorrelación de la serie de curvas de oferta en el mercado eléctrico italiano utilizando la *FACF* y *FPACF* de la serie junto con el procedimiento de identificación propuesto mostrado en la [figura 11](#).

En la [figura 15](#) se muestra la estructura de autocorrelación de los errores de un modelo de regresión funcional ajustado con las variables exógenas mencionadas anteriormente. Estas variables explicativas se incluyen para capturar el efecto de las variables exógenas en las curvas de oferta. Como las series temporales de salida son curvas horarias y las variables explicativas son valores horarios, el modelo las considerará como covariables escalares.

Se observa un comportamiento estacional de la serie: una alta autocorrelación en los retardos 24 y 168 indica que la serie tiene fuertes estacionalidades diarias y semanales no modeladas con las variables explicativas. Además, el patrón de decrecimiento de la *FACF* indica la presencia de una componente autorregresiva en la serie. Por tanto, la autocorrelación observada en el error de regresión del modelo SARMAHX indica que es necesario modelar esta dinámica.

Figura 15.

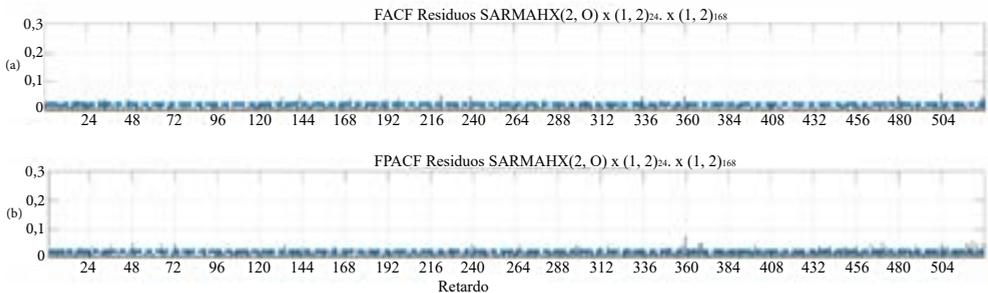
Función de autocorrelación funcional y de autocorrelación parcial funcional (FACF/FPACF) del error de regresión de un modelo de regresión funcional ajustado que incluye las variables exógenas



Fuente: Mestre (2021).

Figura 16.

Función de autocorrelación funcional y de autocorrelación parcial funcional (FACF/FPACF) de los residuos del modelo SARMAHX(2, 0) \times (1, 2)₂₄ \times (1, 2)₁₆₈ ajustado incluyendo variables exógenas. Como no se observan correlaciones significativas por encima de la banda de confianza, se pueden considerar los residuos como ruido blanco funcional



Fuente: Mestre (2021).

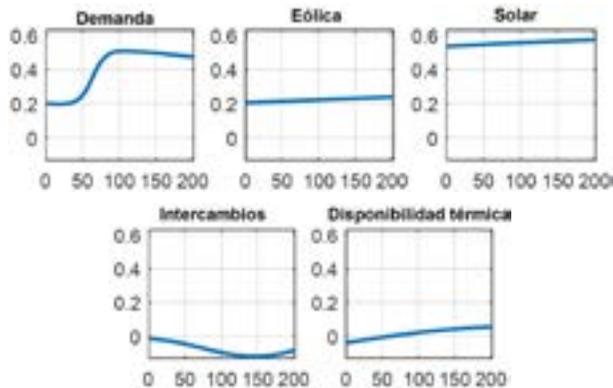
Para seleccionar los órdenes autorregresivos y de media móvil óptimos del modelo SARMAHX, se ha utilizado la metodología de identificación presentada en la sección anterior. Se han añadido términos de media móvil regular y estacional al modelo para tener en cuenta los retardos correlacionados significativos encontrados en los gráficos de FACF/FPACF. Este proceso iterativo se ha llevado hasta que los residuos del modelo ajustado son ruido blanco funcional. Finalmente, el modelo ajustado es un SARMAHX(2, 0) \times (1, 2)₂₄ \times (1, 2)₁₆₈. La figura 16 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de los residuos del modelo SARMAHX ajustado con el límite superior del 95 % de las estadísticas bajo la hipótesis de ruido blanco. Como la mayoría de los valores caen por debajo de este límite superior, no se

puede rechazar la hipótesis de que los residuos sean ruido blanco, lo que valida el modelo desde un punto de vista lineal.

Vale la pena analizar las formas resultantes de los parámetros funcionales ajustados. La **figura 17** muestra los operadores de regresión concurrentes. Analizando estas formas, se puede ver el efecto de cada variable en la curva de oferta. La demanda tiene valores positivos para cada precio, lo que significa que para una demanda más alta, la energía ofrecida a todos los precios aumenta. De hecho, la oferta aumenta más a precios más altos que a precios más bajos, lo que significa que el aumento de la demanda generalmente se cubre con una generación más cara. La producción de viento y solar tiene coeficientes algo planos. Por lo general, esta producción renovable se ofrece a precio 0, por lo tanto, simplemente desplaza la curva hacia arriba o hacia abajo. El intercambio internacional, por otro lado, tiene valores negativos. Esto significa que cuando se importa más energía, la curva de oferta tiene menos energía ofertada.

Figura 17.

Núcleos de los operadores para los regresores del modelo SARMAHX en el estudio de predicción de la curva de oferta



Fuente: Mestre (2021).

3.3.1. Comparación de resultados

Esta sección compara los modelos SARMAHX ajustados con algunos modelos de referencia. Se presentan dos análisis diferentes. Por un lado, como el modelo propuesto se entrena para minimizar el error de predicción a un paso, se analiza una predicción de una hora adelante. Sin embargo, en el mercado eléctrico italiano, las subastas para las 24 horas del día se liquidan al mismo tiempo. Por lo tanto, también se considera una predicción con un horizonte de 24 horas, validando el uso en una aplicación de caso real.

Todos los modelos incluidos en este capítulo se ajustaron utilizando datos del período de ajuste. Una vez que se han estimado sus parámetros, se obtienen estimaciones tanto para el

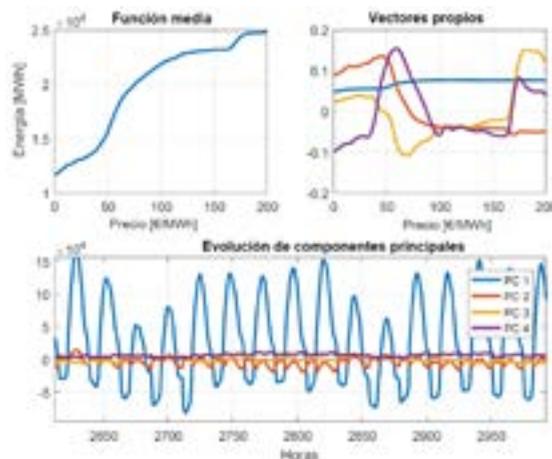
período de ajuste como para el período de test, sin recalibrar los parámetros de los modelos. Para la predicción de 24 horas adelante, se utiliza un enfoque de ventana móvil: al predecir la primera hora $h = 1$ del día $D+1$, la estimación \hat{S}_{D+h} utiliza las curvas reales hasta el día D . Sin embargo, al predecir horas $h > 1$, las curvas reales no se han observado, por lo que las estimaciones pasadas del modelo se utilizan como entradas para el modelo.

Para enriquecer la comparativa, se ha incluido un modelo de cada grupo de los mencionados en la sección 2.1, comparando las capacidades de predicción del modelo propuesto frente a los mejores modelos funcionales encontrados en la literatura. Los modelos a comparar se describen a continuación:

- *Ingenuo*. Modelo de referencia simple para comparar los modelos ensayados. Se utilizan dos versiones, dependiendo de si la simulación es una predicción a horizonte 1 u horizonte 24. En el primer caso, la predicción es simplemente la última curva observada en los datos, es decir, la curva de la hora anterior. En el segundo caso, para los martes, miércoles, jueves y viernes, la predicción será la curva horaria del día anterior, mientras que para los sábados, domingos y lunes, la predicción será la curva horaria del mismo día de la semana anterior.
- *Enfoque de componentes principales*. Este método se utiliza en Pelagatti (2012) para la predicción de curvas de oferta. Extrae las primeras Componentes Principales Funcionales de las curvas y las correspondientes series temporales de sus valores (*scores*). Luego, estos valores se estiman mediante modelos de función de transferencia (*TF*) (Pankratz, 1991), que incluyen variables explicativas. La estimación final de

Figura 18.

Función media, vectores propios asociados a las componentes principales y evolución de las componentes principales de las curvas de oferta



Fuente: Mestre (2021).

las curvas se realiza reconstruyéndolas a partir de los valores estimados de las componentes principales. El período de ajuste se utiliza para entrenar todos los modelos. Las *FPC* se extraen para ese rango y se estiman los parámetros de la *TF*. En el período de test, se obtienen los valores de las componentes proyectando las curvas en la base definida por las *FPC* previamente extraídas.

La **figura 18** representa la función media, los pesos que definen las componentes principales (vectores propios) y los valores obtenidos (*scores*) de las primeras componentes principales de las curvas de oferta. Se extraen tres y cuatro componentes principales, que explican el 98 % y el 99 % de la varianza de los datos, respectivamente. Es importante señalar que cada curva pronosticada con este método es una combinación lineal de solo las tres o cuatro componentes principales extraídas. Estos modelos se denotarán como *PC_FT3* y *PC_FT4*, respectivamente.

- **Enfoque no paramétrico funcional.** Este enfoque es el presentado en la sección 2 de este capítulo.

Sin embargo, en la definición original, la predicción sólo dependía de valores pasados de la serie. Como todos los modelos que se comparan con el modelo SARMAHX propuesto utilizan variables exógenas, se incluirá una versión de este modelo en el estudio de comparación. El modelo lineal parcial semifuncional (Aneiros *et al.*, 2013; Vilar *et al.*, 2018) permite la inclusión de variables escalares exógenas, generalizando el modelo no paramétrico funcional. La expresión del modelo es la siguiente:

$$Y_t(v) = x_t^T \beta(v) + \omega(Y_{t-1})(v) + \varepsilon_t(v), \quad [21]$$

donde $x_t^T = (x_{t,1}, \dots, x_{t,p})$ es un vector de p covariables escalares exógenas, $\beta(v) = (\beta_1(v), \dots, \beta_p(v))$ es un vector de parámetros funcionales desconocidos a estimar y ω es el estimador no paramétrico de Nadaraya-Watson dado en [5]. Para ajustar este modelo al conjunto de datos de la curva de oferta, los parámetros se han seleccionado de la siguiente manera: la función de kernel K utilizada fue la Epanechnikov, definida como $K(u) = 3/4(1 - u^2)$; el parámetro de ancho de banda h se ha seleccionado utilizando el método de los k vecinos más cercanos propuesto en Antoniadis *et al.* (2009); y la semimétrica d seleccionada se basa en la norma L^2 de las curvas. A lo largo de esta sección, este modelo se denotará como NPARHX.

Todos los modelos se entrenan con el período de entrenamiento utilizando las mismas variables exógenas. Posteriormente, cada uno produce una predicción a horizonte 1, asumiendo que se conoce la curva de la última hora, y una predicción a horizonte 24, donde se predicen las 24 horas del día siguiente, siendo la última curva observada la hora 24 del día actual. En el caso de predicción a horizonte 24, la hora 1 siempre se estimará utilizando un horizonte de predicción de 1; la hora 2 se estimará utilizando un horizonte de predicción de 2; y finalmente, el horizonte de predicción utilizado para estimar la hora 24 será 24. De aquí en adelante, se producen predicciones a horizonte 1 y 24 para todo el rango de datos. Se calculan los errores funcionales FMAE y FRMSE, que se definen como:

$$\text{FMAE} = T^{-1} \sum_{i=1}^T \int |Y_i(u) - \hat{Y}_i(u)| du \quad [22]$$

$$\text{FRMSE} = \sqrt{T^{-1} \sum_{i=1}^T \int (Y_i(u) - \hat{Y}_i(u))^2 du} \quad [23]$$

Cuando se predicen ciertos tipos de datos, se debe aplicar algún método de posprocesamiento para mejorar la salida bruta del modelo de predicción que se utiliza. Un caso de este tipo es el que nos ocupa: predecir curvas de oferta agregadas en el mercado eléctrico del día siguiente. Estas curvas son siempre monótonamente crecientes, debido a la propia definición de las funciones de oferta. La formulación del modelo SARMAHX no garantiza que las estimaciones del modelo sean funciones no decrecientes, por lo que para obtener estimaciones fieles de estas curvas con el modelo propuesto, las curvas de salida del modelo \hat{Y}_i se transforman en curvas monótonamente crecientes \hat{Y}_i^+ obtenidas como la solución del siguiente problema de optimización:

$$\min_{\hat{Y}_i^+} \frac{1}{2} \|\hat{Y}_i^+ - \hat{Y}_i\|^2 \quad [24a]$$

$$\text{sueto a } 0 \leq \hat{Y}_i^+(v_i) \leq \hat{Y}_i^+(v_{i+1}), i = 1, \dots, N-1, \quad [24b]$$

donde $\{v_1, \dots, v_N\}$ denota los puntos de discretización de las observaciones funcionales. La función objetivo a minimizar [24a] es la distancia entre las curvas estimadas y su transformación monótona, mientras que la restricción [24b] asegura que la nueva curva sea no decreciente. El problema de optimización se resuelve por mínimos cuadrados ordinarios.

Esta transformación garantiza que las curvas estimadas sean monótonamente crecientes, manteniendo la forma que ha sido estimada por el modelo SARMAHX. Para proporcionar una comparación justa entre el modelo SARMAHX y otros modelos de predicción encontrados en la literatura, la transformación propuesta se aplicará a las estimaciones de todos los modelos considerados en esta sección.

El **cuadro 1** muestra los errores funcionales para las predicciones a horizontes 1 y 24 horas para los períodos de entrenamiento y test. El modelo SARMAHX propuesto muestra una clara ventaja sobre los modelos de referencia, obteniendo un FMAE de 288,66 MWh que es mucho menor que el FMAE del PC_FT4 (el mejor modelo de referencia), que logra un FMAE de 416,05 MWh en el período de test del estudio con horizonte de predicción de un período hacia adelante. Para el caso de predicción con horizonte de 24 horas, los resultados son similares: mientras que el modelo PC_FT4 obtiene un FMAE de 811,69 MWh, no es capaz de mejorar los resultados del modelo SARMAHX concurrente, que logra un FMAE de 709,70 MWh en el período *out-of-sample*. Los resultados de la estimación se analizan más adelante en detalle.

En primer lugar, al observar las predicciones de horizonte 1, se puede ver cómo el enfoque funcional supera a los demás métodos tanto en los períodos de entrenamiento como en el de

Cuadro 1.

Errores promedios para cada método en la predicción a horizonte 1 y horizonte 24 para la serie de curvas de oferta agregadas

| Forecasting horizon | Model | In-Sample | | Out-Of-Sample | |
|---------------------|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | FMAE [MWh] | FRMSE [MWh] | FMAE [MWh] | FRMSE [MWh] |
| 1-Step Ahead | Naïve | 909,39 | 1.258,46 | 818,59 | 1.179,16 |
| | PC_FT3 | 353,85 | 470,51 | 480,54 | 694,15 |
| | PC_FT4 | 276,65 | 378,83 | 416,05 | 569,36 |
| | NPARHX | 389,30 | 553,53 | 641,92 | 884,50 |
| | SARMAHX | 264,62 | 363,10 | 313,11 | 429,66 |
| 24-Step Ahead | Naïve | 1.075,3 | 1.433,5 | 1.382,3 | 1.812,50 |
| | PC_FT3 | 672,06 | 871,33 | 856,62 | 1.148,1 |
| | PC_FT4 | 639,46 | 834,46 | 811,69 | 1.85,07 |
| | NPARHX | 743,47 | 1.010,01 | 987,41 | 1.311,51 |
| | SARMAHX | 590,08 | 787,34 | 709,70 | 963,49 |

Nota: Los errores más bajos se han resaltado en negrita.

Fuente: Mestre (2021).

test. Además, el enfoque funcional es el que ofrece los mejores resultados, con un error absoluto medio de 313 MWh en el período de test, mientras que el FMAE del modelo PC_FT4 es de 416 MWh. Esta diferencia valida la utilidad del modelo SARMAHX como un modelo competitivo para predecir curvas de oferta. Se pueden extraer varias conclusiones de estos resultados. En primer lugar, aunque el enfoque FPCA también utiliza un modelo de series temporales, el hecho de reducir la dimensionalidad afecta significativamente al rendimiento. Como las Componentes Principales se mantienen intactas, las predicciones no pueden adaptarse a los cambios en la serie temporal funcional y la reconstrucción de las curvas pierde precisión. Por el contrario, el modelo funcional propuesto no se basa en ninguna expansión de bases de la serie y tiene en cuenta los valores de toda la curva del pasado reciente. Por lo tanto, puede reflejar mejor los cambios en la serie.

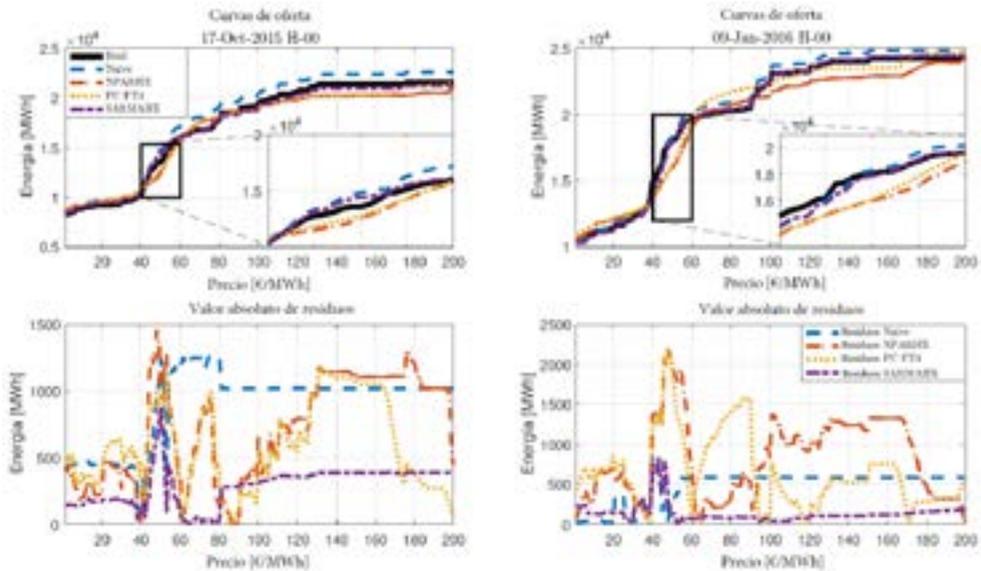
Además, como el enfoque no paramétrico no tiene en cuenta la estructura estacional de los datos, no es capaz de obtener los mismos resultados que los otros modelos de referencia. La [figura 19](#) muestra algunos ejemplos de predicciones para el caso de predicción a horizonte 1, donde se resalta la capacidad del modelo SARMAHX de estimar adecuadamente la forma de las curvas de oferta. Mientras que el modelo propuesto es capaz de estimar con precisión las curvas de oferta, los modelos de referencia no son capaces de capturar el complejo comportamiento de oferta exhibido por las curvas, proporcionando sólo una aproximación suave a las curvas que no tiene en cuenta la naturaleza escalonada de las mismas.

En segundo lugar, las predicciones con horizonte de 24 horas muestran resultados similares al caso de horizonte 1. El modelo SARMAHX proporciona mejores errores medios con respecto a los otros modelos. Globalmente, los errores de predicción con horizonte 24 horas son mucho más altos que los de horizonte 1.

En el mercado diario italiano, el precio de casación en el período de estudio suele estar situado en el rango de precios [30, 70] euros/MWh, por lo que el volumen de las ofertas de los agentes será significativamente mayor en esa parte de la curva de oferta agregada. Por lo tanto, obtener una estimación precisa de la curva de oferta en esa región es de suma importancia para cualquier empresa. Como se puede ver en la [figura 19](#), el modelo SARMAHX es capaz de capturar la forma de la curva de oferta en ese rango de precios, proporcionando una descripción precisa del comportamiento de oferta de los agentes en la zona de interés de la curva de oferta.

Figura 19.

Panel superior: ejemplos de predicciones para estimaciones a horizonte 1 en los períodos *out-of-sample* en el estudio de predicción de curvas de oferta. Se muestran en detalle las curvas en el rango de precios [40, 60] euros/MWh, resaltando las diferencias entre los distintos modelos de predicción. Panel inferior: valor absoluto de las curvas residuales de los modelos



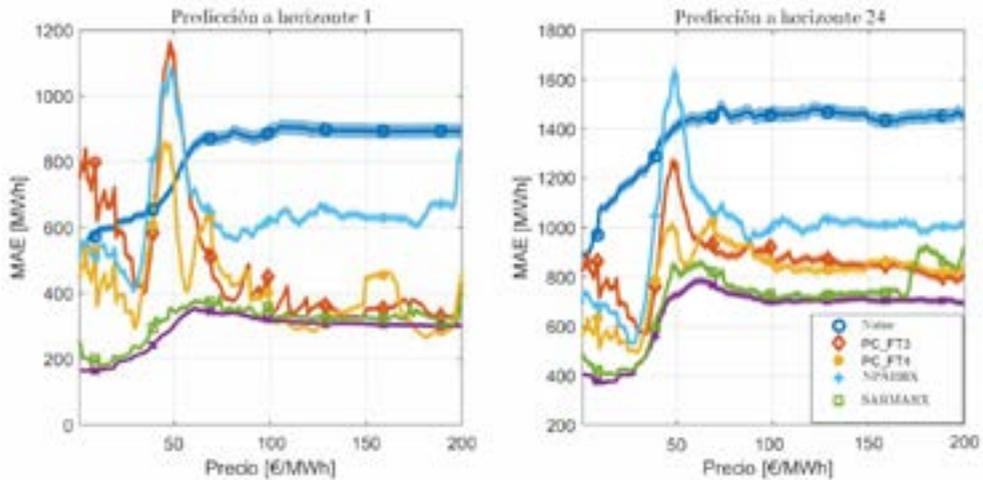
Fuente: Mestre (2021).

La forma de las curvas de oferta estimadas es esencial para analizar la oferta estratégica de los competidores de una empresa eléctrica, porque contiene información valiosa sobre el comportamiento de oferta de los agentes. Las curvas de oferta pronosticadas, junto con las estimaciones de la demanda, se pueden utilizar para definir las RDC, que se utilizan a menudo para calibrar modelos de equilibrio de mercado (Díaz *et al.*, 2010) así como modelos de optimización de oferta (Baillio *et al.*, 2004). En Portela *et al.* (2017), los autores analizan la importancia de obtener estimaciones fieles de las pendientes de las RDC, ya que indica la

capacidad de un agente para influir en los precios del mercado. Esto resalta la necesidad de un modelo de predicción que no solo capte el nivel general de las curvas de oferta, sino que también proporcione una estimación precisa de la forma de la curva.

Figura 20.

FMAE para cada precio en las predicciones de horizonte 1 y horizonte 24 en el período de test en el estudio de predicción de las curvas de oferta



Nota: Como el error FMAE del modelo Naive es significativamente mayor que el de los otros modelos, no se incluye. Las regiones sombreadas son bandas de confianza del 90 % para el FMAE.

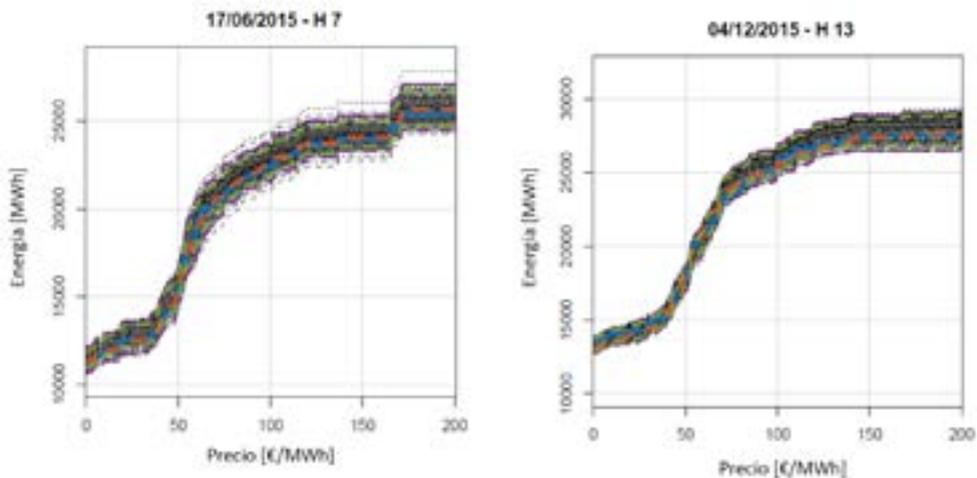
Fuente: Mestre (2021).

Como se puede ver en la figura 20, se presenta el error absoluto medio (*MAE*) para cada precio de oferta para el período de test, para las predicciones de horizonte 1 y horizonte 24, que se obtienen como el valor medio del error absoluto para cada precio de las curvas. Las figuras muestran el desempeño de cada método para diferentes rangos de precios y se puede observar cómo los modelos SARMAHX producen errores más uniformes a lo largo de los distintos precios. De nuevo, como los modelos propuestos no dependen de las *FPC*, se pueden adaptar mejor a los escalones de oferta en la curva. La mejora más significativa se observa en el rango de precios de interés mencionado anteriormente: por ejemplo, mientras que el error absoluto medio del modelo PC_FT4 en el precio de 50 euros/MWh es de 1.000 MWh, el modelo SARMAHX logra un error absoluto medio de 730 MWh en el pronóstico con horizonte de 24 horas. Esta diferencia es más pronunciada en el estudio con horizonte 1, donde los errores absolutos medios del modelo PC_FT4 en el rango de precios de interés están cerca de 800 MWh frente a los errores del modelo SARMAHX, que están cerca de 350 MWh. Además, se incluyen bandas de confianza de los errores *MAE* para facilitar la interpretación de los resultados. Como las bandas de confianza no se superponen, se puede concluir que los errores de los modelos SARMAHX son significativamente menores que los de los otros modelos considerados en este estudio.

Finalmente, cabe destacar que a partir de los residuos de estos modelos, en Mestre (2021) se propone una metodología probabilística para la generación de escenarios futuros de las curvas de oferta, especialmente indicada para la optimización de las estrategias de oferta. Un ejemplo se puede ver en la [figura 21](#).

Figura 21.

Estimación de escenarios de curvas de oferta para dos horas seleccionadas



Fuente: Mestre (2021).

4. CONCLUSIONES

Los agentes que operan en los mercados liberalizados de electricidad se enfrentan a distintas fuentes de incertidumbre, que hacen necesario disponer de herramientas avanzadas de análisis y predicción que ayuden a la toma de decisiones para optimizar sus estrategias de oferta.

El conjunto de las ofertas históricas presentadas por los distintos agentes en el mercado son una fuente de información muy valiosa, ya que permiten caracterizar sus estrategias de oferta. Las técnicas de *big data* ofrecen una solución escalable para el procesamiento de estos grandes volúmenes de información.

La caracterización del comportamiento de los agentes se puede realizar a partir de las curvas agregadas de oferta de compra y de venta, o bien las curvas de demanda residual. Una forma de analizar y predecir dichas curvas es mediante el uso del análisis de datos funcionales. En este trabajo se propone un enfoque funcional para la predicción de curvas de oferta, utilizando un modelo funcional basado en la metodología de Box-Jenkins (Box *et al.*, 2008).

El desarrollo del modelo funcional SARMAHX, que admite la inclusión de dos estacionalidades y distintas variables explicativas, permite modelizar series temporales funcionales

horarias considerando sus estacionalidades diarias y semanales. Este modelo permite obtener predicciones más precisas de las curvas de oferta agregada, superando a otros métodos tradicionales.

Además, el procedimiento de identificación basado en la función de autocorrelación funcional simple y parcial es un elemento clave para analizar la estructura de correlación de las series temporales funcionales y para determinar los órdenes AR y MA del modelo. La eficacia del modelo se ha ilustrado con un caso real de predicción de curvas de oferta horarias en el mercado eléctrico diario de Italia.

Referencias

- ÁLVAREZ, J., BOSQ, D. y RUIZ-MEDINA, M. (2017). Asymptotic properties of a component-wise ARH(1) plug-in predictor. *Journal of Multivariate Analysis*, 155, pp. 12–34. doi: 10.1016/j.jmva.2016.11.009
- ANEIROS, G. y VIEU, P. (2008). Nonparametric time series prediction: A semi-functional partial linear modeling. *Journal of Multivariate Analysis*, 99(5), pp. 834–857. doi: 10.1016/j.jmva.2007.04.010
- ANEIROS, G., VILAR, J. y RAÑA, P. (2016). Short-term forecast of daily curves of electricity demand and price. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 80, pp. 96–108. doi: 10.1016/j.ijepes.2016.01.034
- ANEIROS, G., VILAR, J. M., CAO, R. y MUÑOZ SAN ROQUE, A. (2013). Functional Prediction for the Residual Demand in Electricity Spot Markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(4), pp. 4201–4208. doi: 10.1109/TPWRS.2013.2258690
- ANTOCH, J., PRCHAL, L., ROSARIA DE ROSA, M. y SARDA, P. (2010). Electricity consumption prediction with functional linear regression using spline estimators. *Journal of Applied Statistics*, 37(12), pp. 2027–2041. doi: 10.1080/02664760903214395
- ANTONIADIS, A., PAPANODITIS, E. y SAPATINAS, T. (2009). Bandwidth selection for functional time series prediction. *Statistics & Probability Letters*, 79(6), pp. 733–740. doi: 10.1016/j.spl.2008.10.028
- AUE, A., NORINHO, D. D. y HÖRMANN, S. (2015, enero). On the Prediction of Stationary Functional Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 110(509), pp. 378–392. doi: 10.1080/01621459.2014.909317
- BAILLO, A., VENTOSA, M., RIVIER, M. y RAMOS, A. (2004). Optimal Offering Strategies for Generation Companies Operating in Electricity Spot Markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(2), pp. 745–753. doi: 10.1109/TPWRS.2003.821429
- BOSQ, D. (2000). *Linear Processes in Function Spaces – Theory and Applications* (n.o 149). New York: Springer-Verlag.
- BOX, G. E. P., JENKINS, G. M. y REINSEL, G. C. (2008). *Time series analysis: forecasting and control* (4th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley. (OCLC: ocn176895531).
- BUNN, D. W. y FARMER, E. (1985). *Comparative Models for Electrical Load Forecasting*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.
- CAMPOS, F. A., MUÑOZ, A., SÁNCHEZ-ÚBEDA, E. F. y PORTELA, J. (2016). Strategic Bidding in Secondary Reserve Markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 31(4), pp. 2847–2856. doi: 10.1109/TPWRS.2015.2453477
- CHEN, K., CHEN, K., WANG, Q., HE, Z., HU, J. y HE, J. (2019). Short-Term Load Forecasting With Deep Residual Networks. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 10(4), pp. 3943–3952. doi: 10.1109/TSG.2018.2844307
- COLLADO, J. V., SÁNCHEZ-ÚBEDA, E. F. y MUÑOZ SAN ROQUE, A. (2004). SGO: sistema de información para la realización de ofertas en el mercado eléctrico español. En *Anales de mecánica y electricidad*, Vol. 81 (pp. 40–50). Asociación de Ingenieros del ICAI.

- CYBENKO, G. (1989). Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2(4), pp. 303–314. doi: 10.1007/BF02551274
- DAMON, J. y GUILLAS, S. (2002). The inclusion of exogenous variables in functional autoregressive ozone forecasting. *Environmetrics*, 13(7), pp. 759–774. doi: 10.1002/env.527
- DAMON, J. y GUILLAS, S. (2005). Estimation and Simulation of Autoregressive Hilbertian Processes with Exogenous Variables. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 8(2), pp. 185–204. doi: 10.1007/s11203-004-1031-6
- DÍAZ, C. A., VILLAR, J., CAMPOS, F. A. y RENESES, J. (2010). Electricity market equilibrium based on conjectural variations. *Electric Power Systems Research*, 80(12), pp. 1572–1579. doi: 10.1016/j.epsr.2010.07.012
- DIDERICKSEN, D., KOKOSZKA, P. y ZHANG, X. (2012). Empirical properties of forecasts with the functional autoregressive model. *Computational Statistics*, 27(2), pp. 285–298. doi: 10.1007/s00180-011-0256-2
- ERBAS, B., HYNDMAN, R. J. y GERTIG, D. M. (2007). Forecasting age-specific breast cancer mortality using functional data models. *Statistics in Medicine*, 26(2), pp. 458–470. doi: 10.1002/sim.2306
- FARAWAY, J. J. (1997). Regression analysis for a functional response. *Technometrics*, 39(3), pp. 254–261.
- FERRATY, F. y VIEU, P. (2006). *Nonparametric Functional Data Analysis – Theory and Practice*. New York: Springer-Verlag.
- GALEANO, P. (2021). Una aplicación del análisis de series temporales funcionales a los precios horarios de la electricidad en el mercado mibel. En D. PEÑA, P. PONCELA y E. RUIZ (editores), *Análisis econométrico y big data* (pp. 163–190). Madrid: Funcas.
- GIANFREDA, A. y GROSSI, L. (2012). Forecasting Italian electricity zonal prices with exogenous variables. *Energy Economics*, 34(6), pp. 2228–2239. doi: 10.1016/j.eneco.2012.06.024
- HALL, P., MÜLLER, H.-G. y WANG, J.-L. (2006). Properties of principal component methods for functional and longitudinal data analysis. *The Annals of Statistics*, 34(3), pp. 1493–1517.
- HORVÁTH, L., LIU, Z., RICE, G. y WANG, S. (2020). A functional time series analysis of forward curves derived from commodity futures. *International Journal of Forecasting*, 36(2), pp. 646–665. doi: 10.1016/j.ijforecast.2019.08.003
- HYNDMAN, R. J. y SHANG, H. L. (2009). Forecasting functional time series. *Journal of the Korean Statistical Society*, 38(3), pp. 199–211. doi: 10.1016/j.jkss.2009.06.002
- HYNDMAN, R. J. y ULLAH, M. S. (2007). Robust forecasting of mortality and fertility rates: A functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(10), pp. 4942–4956. doi: 10.1016/j.csda.2006.07.028
- JOSKOW, P. L. (2008). Lessons Learned from Electricity Market Liberalization. *The Energy Journal*, 29(SI2). doi: 10.5547/ISSN0195-6574-EJ-Vol29-NoSI2-3
- KARGIN, V. y ONATSKI, A. (2008). Curve forecasting by functional autoregression. *Journal of Multivariate Analysis*, 99(10), pp. 2508–2526. doi: 10.1016/j.jmva.2008.03.001
- KLEPSCH, J., KLÜPPELBERG, C. y WEI, T. (2017). Prediction of functional ARMA processes with an application to traffic data. *Econometrics and Statistics*, 1, pp. 128–149. doi: 10.1016/j.ecosta.2016.10.009
- KOKOSZKA, P., RICE, G. y SHANG, H. L. (2017). Inference for the autocovariance of a functional time series under conditional heteroscedasticity. *Journal of Multivariate Analysis*, 162, pp. 32–50. doi: 10.1016/j.jmva.2017.08.004
- LIEBL, D. (2013). Modeling and forecasting electricity spot prices: A functional data perspective. *The Annals of Applied Statistics*, 7(3), pp. 1562–1592. doi: 10.1214/13-AOAS652
- LIU, Z., YAN, J., SHI, Y., ZHU, K. y PU, G. (2012). Multi-agent based experimental analysis on bidding mechanism in electricity auction markets. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 43(1), pp. 696–702. doi: 10.1016/j.ijepes.2012.05.056
- MAS, A. (2007). Weak convergence in the functional autoregressive model. *Journal of Multivariate Analysis*, 98(6), pp. 1231–1261. doi: 10.1016/j.jmva.2006.05.010

- MESTRE, G., PORTELA, J., MUÑOZ SAN ROQUE, A. y ALONSO, E. (2020). Forecasting hoignorearly supply curves in the Italian Day-Ahead electricity market with a double-seasonal SAR- MAHX model. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 121, 106083. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2020.106083>
- MESTRE, G., PORTELA, J., RICE, G., MUÑOZ SAN ROQUE, A. y ALONSO, E. (2021). Functional time series model identification and diagnosis by means of auto- and partial autocorrelation analysis. *Computational Statistics & Data Analysis*, 155, 107108. doi: [10.1016/j.csda.2020.107108](https://doi.org/10.1016/j.csda.2020.107108)
- MESTRE, G., SÁNCHEZ-ÚBEDA, E. F., MUÑOZ SAN ROQUE, A. y ALONSO, E. (2022). The arithmetic of stepwise offer curves. *Energy*, 239, 122444. doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.122444>
- MESTRE, G. (2021). *Probabilistic forecasting of functional time series: Application to scenario-generation of residual demand curves in electricity markets* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Pontificia Comillas.
- MONTEIRO, C., RAMIREZ-ROSADO, I. J., FERNANDEZ-JIMENEZ, L. A. y RIBEIRO, M. (2018). New probabilistic price forecasting models: Application to the Iberian electricity market. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 103, pp. 483–496. doi: [10.1016/j.ijepes.2018.06.005](https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2018.06.005)
- MOURID, T. (2002). Estimation and Prediction of Functional Autoregressive Processes. *Statistics*, 36(2), pp. 125–138. doi: [10.1080/02331880212048](https://doi.org/10.1080/02331880212048)
- NADARAYA, E. A. (1964). On Estimating Regression. *Theory of Probability & Its Applications*, 9(1), pp. 141–142. doi: [10.1137/1109020](https://doi.org/10.1137/1109020)
- PANKRATZ, A. (1991). *Forecasting with dynamic regression models*. New York: Wiley.
- PAPARODITIS, E. y SAPATINAS, T. (2013). Short-Term Load Forecasting: The Similar Shape Functional Time-Series Predictor. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(4), pp. 3818–3825. doi: [10.1109/TPWRS.2013.2272326](https://doi.org/10.1109/TPWRS.2013.2272326)
- PELAGATTI, M. (2012). *Supply Function Prediction in Electricity Auctions* (Inf. Téc.).
- PORTELA, J. (2017). *Functional time series forecasting in electricity markets: a novel parametric approach* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Pontificia Comillas, Madrid.
- PORTELA, J., MUÑOZ, A., SÁNCHEZ-ÚBEDA, E. F., GARCÍA-GONZÁLEZ, J. y GONZÁLEZ, R. (2017). Residual Demand Curves for Modeling the Effect of Complex Offering Conditions on Day- Ahead Electricity Markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 32(1), pp. 50–61. doi: [10.1109/TPWRS.2016.2552240](https://doi.org/10.1109/TPWRS.2016.2552240)
- PORTELA, J., MUÑOZ SAN ROQUE, A. y ALONSO, E. (2018). Forecasting Functional Time Series with a New Hilbertian ARMAX Model: Application to Electricity Price Forecasting. *IEEE Transactions on Power Systems*, 33(1), pp. 545–556. doi: [10.1109/TPWRS.2017.2700287](https://doi.org/10.1109/TPWRS.2017.2700287)
- PRETE, C. L. y HOBBS, B. F. (2015). Market power in power markets: an analysis of residual demand curves in California's day-ahead energy market (1998-2000). *The Energy Journal*, 0(2).
- SÁNCHEZ-ÚBEDA, E. F. (1999). *Models for data analysis: contributions to automatic learning*. (Ph.D thesis). Madrid: Universidad Pontificia Comillas.
- SÁNCHEZ-ÚBEDA, E. F. y GARCÍA-GONZÁLEZ, J. (2000). Management of sealed-bid auction curves: Applications of the Linear Hinges Model. *IPMU Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems, Madrid*, 2.
- SÁNCHEZ-ÚBEDA, E. F., MUÑOZ, A. y VILLAR, J. (2006). Minería y visualización de datos del mercado eléctrico español. Inteligencia Artificial. *Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, 10(29), pp. 79–88.
- SÁNCHEZ-ÚBEDA, E. F. y WEHENKEL, L. (1998). The Hinges model: A one-dimensional continuous piecewise polynomial model. En *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems, IPMU* (pp. 878–885). Paris.
- SEN, R. y KLÜPPELBERG, C. (2019, julio). Time series of functional data with application to yield curves. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 35(4), pp. 1028–1043. doi: [10.1002/asmb.2443](https://doi.org/10.1002/asmb.2443)

- SHAH, I. y LISI, F. (2019). Forecasting of electricity price through a functional prediction of sale and purchase curves. *Journal of Forecasting*, pp. 1– 18. doi: 10.1002/for.2624
- SHANG, H. L. (2012). Point and interval forecasts of age-specific fertility rates: a comparison of functional principal component methods. *Journal of Population Research*, 29(3), pp. 249–267. doi: 10.1007/s12546-012-9087-4
- TURBILLON, C., MARION, J.-M. y PUMO, B. (2007). Estimation of the moving-average operator in a Hilbert space. En *Recent Advances in Stochastic Modeling and Data Analysis* (pp. 597–604). Chania, Greece: World Scientific Publications. doi: 10.1142/9789812709691_0070
- UGEDO, A., LOBATO, E., FRANCO, A., ROUCO, L., FERNANDEZ-CARO, J., DE-BENITO, J., . . . DE-LA-HOZ, J. (2003). Stochastic model of residual demand curves with decision trees. En *Power engineering society general meeting, 2003, IEEE, Vol. 2* (pp. 979–984).
- VALDERRAMA, M. J., OCANA, F. A. y AGUILERA, A. M. (2002). Forecasting PC-ARIMA models for functional data. En W. HÄRDLE y RÖNZL (Eds.), *Proceedings in Computational Statistics* (pp. 25–36). Physica, Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-57489-4_3
- VILAR, J., ANEIROS, G. y RAÑA, P. (2018, marzo). Prediction intervals for electricity demand and price using functional data. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 96, pp. 457–472. doi: 10.1016/j.ijepes.2017.10.010
- VILAR, J. M., CAO, R. y ANEIROS, G. (2012, julio). Forecasting next-day electricity demand and price using nonparametric functional methods. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 39(1), pp. 48–55. doi: 10.1016/j.ijepes.2012.01.004
- VILLAR, J., MUÑOZ, A., SÁNCHEZ-ÚBEDA, E. F., MATEO, A., CASADO, M., CAMPOS, A., . . . MARCOS, J. J. (2001). SGO: Management information system for strategic bidding in electrical markets. En *Power Tech Proceedings, 2001 IEEE Porto, Vol. 1*. IEEE.
- WAGNER-MUNS, I. M., GUARDIOLA, I. G., SAMARANAYKE, V. A. y KAYANI, W. I. (2018). A Functional Data Analysis Approach to Traffic Volume Forecasting. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 19(3), pp. 878–888. doi: 10.1109/TITS.2017.2706143
- WATSON, G. S. (1964). Smooth Regression Analysis. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, 26(4), pp. 359–372.
- WERON, R. (2014). Electricity price forecasting: A review of the state-of-the-art with a look into the future. *International Journal of Forecasting*, 30(4), pp. 1030–1081. doi: 10.1016/j.ijforecast.2014.08.008
- XU, L. y BALDICK, R. (2007, noviembre). Transmission-Constrained Residual Demand Derivative in Electricity Markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 22(4), pp. 1563–1573. doi: 10.1109/TPWRS.2007.907511
- YAO, F., MÜLLER, H.-G. y WANG, J.-L. (2005). Functional data analysis for sparse longitudinal data. *Journal of the American Statistical Association*, 100(470), pp. 577–590.
- ZHANG, J.-L., ZHANG, Y.-J., LI, D.-Z., TAN, Z.-F. y JI, J.-F. (2019). Forecasting day- ahead electricity prices using a new integrated model. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 105, pp. 541–548. doi: 10.1016/j.ijepes.2018.08.025